

Math. P.

635

pd

Math. P. 635^{pd}

Weissenborn

Die Principien
der
höheren Analysis

in ihrer Entwicklung

von Leibniz bis auf Lagrange,

als

ein historisch-kritischer Beitrag

zur Geschichte der Mathematik

dargestellt

von

Dr. Hermann Weissenborn.

Staatsbibliothek
München

Mit 3 Figuren - Tafeln.

Halle.

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1856.

284 = 1/4

höheren Analysen
der
Die Principien

in ihrer Entwicklung
von Leibniz bis auf Lagrange,

als

ein historisch-kritischer Beitrag

zur Geschichte der Mathematik

herausgegeben



Mit 3 Tafeln + Text.

Halle

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1856.

V o r r e d e.

Der Zweck vorliegender Schrift, die bereits zu Ostern 1853 fast in derselben Gestalt, in welcher ich sie jetzt dem Publicum übergebe, vollendet vorlag, an deren Veröffentlichung ich aber theils durch Verhältnisse, theils weil die Ausführung einer anderen Arbeit (über die cyclischen Curven) drängte, verhindert war, ist, einen Beitrag zur Geschichte der höheren Mathematik zu liefern. Mit Recht hat schon Herr Dr. Gerhardt in seiner „Entdeckung der höheren Analysis“ über die Vernachlässigung derselben Klage geführt und auf ihre Wichtigkeit für die Aufstellung einer naturgemässen Methode aufmerksam gemacht; es mag daher hier nur noch auf einen anderen Vorthail hingewiesen werden, den eine vertraute Bekanntschaft mit der Entwicklungsgeschichte nicht allein der Mathematik, sondern überhaupt jeder Wissenschaft mit sich führt. Ich finde denselben einmal darin, dass durch sie ein richtiges Urtheil über den gegenwärtigen Stand derselben ermöglicht, zweitens aber und ganz besonders darin, dass durch sie vermöge der von ihr hervorgebrachten Erweiterung des Gesichtskreises die allgemeine Bildung gefördert wird. Denn wenn Carl der fünfte sich dahin aussprach, so viele Sprachen ich lerne, auf so viele Arten lerne ich ein Mensch zu sein, so kann etwas Aehnliches gewiss von der Kenntniss verschiedener Methoden, auf welche Disciplin sie sich auch beziehen mögen, behauptet werden. Eine jede verlangt, um sie recht zu verstehen und zu würdigen, ein Herausgehen aus sich selbst, und ein Sich-Versetzen in den Ideankreis und den Gedankengang eines Anderen; das beste Mittel, eine nur schädliche Einseitigkeit zu verhüten und dem Geiste Gewandtheit zu verschaffen. Durch Herbeiführung der letzteren aber wird in der Mathematik im Besonderen zugleich der praktische Nutzen eines solchen Studiums wie das bezeichnete

hervorgerufen und dies ist folgender: Es muss das Streben eines jeden Mannes der Wissenschaft sein, diese zu erweitern und durch Auffindung neuer Resultate ihre Grenzen weiter hinauszurücken. Hierbei aber bereitet oft zwar nicht die Unzulänglichkeit der vorhandenen Hülfsmittel, aber doch ihre Unanwendbarkeit in einzelnen Fällen grosse Schwierigkeiten. Gerade solche Fälle aber sind zu untersuchen, denn Alles, was auf dem gewöhnlichen Wege gefunden werden kann, ist entweder schon dargelegt oder bloß deswegen nicht ausgesprochen worden, nicht weil es unbekannt, sondern weil es allzu gewöhnlich ist. Es ist daher Jeder, der etwas Neues vorbringen will, genöthigt, eine eigene Bahn einzuschlagen und eigene Forschungen anzustellen. Wie das im Einzelnen zu machen, darüber lassen sich keine Regeln geben, das ist vielmehr Sache der Uebung, des scharfen Blickes, des Talents. Immerhin aber wird es vortheilhaft sein, über mehrere Methoden verfügen zu können, um, wenn die eine versagt, zur anderen zu greifen. Die Kenntniss solcher verschiedenen Wege, Aufgaben zu lösen, verschafft aber gerade die Geschichte der Mathematik; ich verweise nur auf Newton's Methode, aus einer gegebenen Fluxions- oder Differenzial-Gleichung die abhängig Veränderliche in Form einer Reihe darzustellen (s. §. 3.); auf Newton's und Tschirnhausens Verfahren bei der Quadratur (s. §. 3. u. §. 7.); auf Roberval's und Nieuwentiit's Lösung des Tangentenproblems (s. §. 1. u. §. 10.) u. s. w. Ihre Kenntniss dürfte daher, besonders für den Anfänger, nicht ohne Interesse und Nutzen sein, sowohl in rein wissenschaftlicher als praktischer Beziehung.

Es konnte nun aber einmal nicht meine Absicht sein, die verschiedenen Methoden jede in ihrer Ausführlichkeit anzugeben, sondern nur, auch Andere zum Selbststudium derselben anzuregen und ihnen in dieser meiner Schrift dabei eine Erleichterung zu verschaffen. Wer es selbst versucht hat, mathematische Schriften aus einer früheren Zeit, z. B. aus dem 17ten Jahrhundert zu lesen, wird wissen, dass diese Arbeit nicht gerade zu den leichtesten gehört, weil die ganze damalige Denk- und Darstellungsweise eine von der jetzigen so ganz verschiedene ist. Specielle Sätze, die gegenwärtig, eben weil sie keine Bedeutung für das Ganze haben, höchstens beiläufig erwähnt werden, galten damals als allgemein bekannte, wichtige Theoreme, und indem sie oft aus den verschiedensten Schriftstellern, der eine aus Euclid, der andere aus Apollonius, ein

dritter aus den Schriften eines Dritten zusammengetragen wurden, setzte man aus ihnen oft die Beweise mosaikartig zusammen, während hingegen andere Sätze, die gegenwärtig Jedermann kennt, erst kaum geahnt waren. Gewöhnlich aber wurden neue Lehrsätze damals ohne jede Begründung hingestellt, man möchte fast sagen in Form von Recepten, indem blos das rein mechanische Verfahren angegeben ward; entweder weil man in der That einen Beweis nicht hatte und nur weil sich das erhaltene Resultat in einigen Fällen als richtig erwiesen hatte, sogleich schloss, dass dies stets statthaben werde, oder aber weil man, einer noch mittelalterlichen Geheimnissthuerei huldigend, es liebte, sich und seine Entdeckung mit dem Schleier des Geheimnissvollen und Wunderbaren zu umgeben, wohl wissend, welchen Eindruck das Unerklärbare auf manche Geister zu machen im Stande ist, und dass auch das Gewöhnliche auf diese Weise den Anstrich des Bedeutenden und Wichtigen erhält. So kommt es denn, dass der, welcher es sich zur Aufgabe macht, nur die Cardinalpunkte hinzustellen, Vieles, nachdem es, oft mit Mühe und Zeitverlust, entziffert ist, wieder verwerfen und so Manches umsonst lesen muss. Ich habe nun, um ein möglichst treues Bild von der Art und Weise, wie sich ein jeder der in dieser Schrift erwähnten Männer ausdrückte, zu verschaffen, die Sätze erst in der Form wiedergegeben, wie sie sich bei ihnen finden, sodann aber dieselben, indem ich das ihnen zu Grunde liegende Princip hinzustellen versuchte, sie einestheils in der jetzigen Sprache der Wissenschaft ausgedrückt, anderntheils ihre Richtigkeit oder Unrichtigkeit geprüft, und glaubte in dieser Beziehung meine Arbeit als eine historisch-kritische bezeichnen zu dürfen. Es war zweitens meine Absicht, nur die Principien der höheren Analysis zu berücksichtigen, weil die Aufstellung derselben der bei weitem schwierigste und wichtigste Schritt in der Geschichte der Mathematik war, und weil ihre Begründung eine so mannigfaltige für den Mathematiker sowohl als Philosophen interessante ist. Zu diesen Principien rechne ich die rein analytischen Fundamentalsätze der Differenzialrechnung, die Methoden zur Lösung der einfachsten auf stetig gekrümmte Linien sich beziehenden Aufgaben, und endlich die Theorie der unendlichen Reihen. Die geometrischen Probleme sind, da sie den ersten Anlass zur Entdeckung der höheren Analysis gaben, und indem an ihnen fast alle Methoden sich entwickelten, zum Ausgangspunkte genommen worden. Bei der Darstellung

derselben stand mir ein doppelter Weg offen, entweder eine rein chronologische Reihenfolge einzuhalten, wodurch aber Verwandtes getrennt, Verschiedenartiges nahe an einander gerückt worden wäre; oder das Gleichartige im Zusammenhang zu behandeln, jede Methode für sich durch alle Stadien ihrer Ausbildung hindurch zu verfolgen und zu entwickeln. Ich zog Letzteres vor und theilte daher den Stoff in drei Hauptabschnitte, deren erster die auf die Vorstellung der Bewegung gegründeten Theorien, die ich unter dem Namen Fluxionsrechnung im weiteren Sinne zusammenfasste, der zweite die Leibnizische Differenzialrechnung, der dritte die Lagrange'sche Derivations- oder Functionsrechnung enthält.

Es bleibt mir nur noch übrig, der Schriften des Herrn Dr. Gerhardt zu gedenken. Auf sie weise ich, wie ich es im Einzelnen gethan, so hier im Ganzen ausdrücklich hin, da ich, um einen festen Anfangspunkt zu gewinnen, Manches als bekannt voraussetzen musste, wie z. B. die Cavaleri'sche Lehre des Untheilbaren, Fermat's Tangentenmethode, seine Bestimmung der Maxima und Minima u. s. w., was sich in den genannten Schriften erklärt findet; auch habe ich die denselben als Beilagen beigegebenen Manuscripte Leibnizens dem über ihn handelnden Paragraphen zu Grunde gelegt. Was ferner den Umstand betrifft, dass ich einige bereits von Herrn Dr. Gerhardt in seiner „Entdeckung der höheren Analysis. 1855“ erwähnte Methoden ebenfalls behandle, so habe ich mich nur deshalb und gerade deshalb zur Veröffentlichung meiner Arbeit entschlossen, weil ich mich überzeuge, dass ich in derselben diese Methoden durch Eingehen in das Einzelne und Anführen von Beispielen ausführlicher erkläre und ich bei der Seltenheit der betreffenden Werke glaubte, es werde Denjenigen, die nicht in der Lage sind, diese selbst einzusehen, erwünscht sein, soviel als möglich über sie zu erfahren. Sodann aber habe ich auch nicht überall die Ansicht des Herrn Dr. Gerhardt theilen können, wie ich dies zum Theil in einem Aufsatze im XXV. Bande des Grunert'schen Archivs bereits ausgesprochen habe und glaubte auf manche Stellen gerade in den Leibnizischen Manuscripten aufmerksam machen zu müssen, die mir mein Urtheil zu bestätigen schienen. Mit einem Worte ich war der Meinung, es dürfe meine Schrift zum Theil als eine nicht unwillkommene Ergänzung, zum Theil als eine Weiterführung der Arbeit des Herrn Dr. Gerhardt angesehen werden, und füge nur noch hinzu, dass vielleicht gerade jetzt eine ausführlichere Er-

wähnung Nieuwentiit's (s. §. 10.) um so mehr gerechtfertigt ist, als aus dem kürzlich von Herrn Dr. Gerhardt herausgegebenen Briefwechsel Leibnizens mit den Bernoulli's ersichtlich ist, wie lebhaft denselben dieser Mann und sein Angriff auf die Differenzialrechnung interessirte.

So übergebe ich denn das Büchlein der Oeffentlichkeit mit dem Wunsche, dass es mir gelungen sein möge, etwas beigetragen zu haben zur Anregung und Erleichterung des Studiums der Geschichte der Mathematik; wobei ich nicht umhin kann, ganz besonders der auch leichter zugänglichen Acta Eruditorum von ihrem Beginne 1682 bis in den Anfang des 18ten Jahrhunderts als einer nicht genug zu beachtenden Fundgrube fruchtbarer Ideen zu gedenken. Hätte ich mein Ziel, dem möglichst nahe zu kommen ich mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln redlich bestrebt gewesen bin, nur irgend erreicht, so würde ich mich, in der Ueberzeugung etwas Nützliches gefördert zu haben, hinlänglich belohnt fühlen.

Die Ausstattung, namentlich die Schärfe des Druckes, dürften schwerlich etwas zu wünschen übrig lassen.

Bonn, Weihnachten 1855.

H. Weissenborn.

1. Die Differentialrechnung	113—121
§. 1. Die Differentialrechnung	113—115
§. 2. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	115—121
§. 3. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	121—125
§. 4. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	125—131
§. 5. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	131—135
§. 6. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	135—141
§. 7. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	141—147
§. 8. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	147—153
§. 9. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	153—159
§. 10. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	159—165
§. 11. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	165—171
§. 12. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	171—177
§. 13. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	177—183
§. 14. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	183—189
§. 15. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	189—195
§. 16. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	195—201
§. 17. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	201—207
§. 18. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	207—213
§. 19. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	213—219
§. 20. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	219—225
§. 21. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	225—231
§. 22. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	231—237
§. 23. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	237—243
§. 24. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	243—249
§. 25. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	249—255
§. 26. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	255—261
§. 27. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	261—267
§. 28. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	267—273
§. 29. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	273—279
§. 30. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	279—285
§. 31. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	285—291
§. 32. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	291—297
§. 33. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	297—303
§. 34. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	303—309
§. 35. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	309—315
§. 36. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	315—321
§. 37. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	321—327
§. 38. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	327—333
§. 39. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	333—339
§. 40. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	339—345
§. 41. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	345—351
§. 42. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	351—357
§. 43. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	357—363
§. 44. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	363—369
§. 45. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	369—375
§. 46. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	375—381
§. 47. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	381—387
§. 48. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	387—393
§. 49. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	393—399
§. 50. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	399—405
§. 51. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	405—411
§. 52. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	411—417
§. 53. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	417—423
§. 54. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	423—429
§. 55. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	429—435
§. 56. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	435—441
§. 57. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	441—447
§. 58. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	447—453
§. 59. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	453—459
§. 60. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	459—465
§. 61. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	465—471
§. 62. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	471—477
§. 63. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	477—483
§. 64. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	483—489
§. 65. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	489—495
§. 66. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	495—501
§. 67. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	501—507
§. 68. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	507—513
§. 69. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	513—519
§. 70. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	519—525
§. 71. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	525—531
§. 72. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	531—537
§. 73. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	537—543
§. 74. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	543—549
§. 75. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	549—555
§. 76. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	555—561
§. 77. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	561—567
§. 78. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	567—573
§. 79. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	573—579
§. 80. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	579—585
§. 81. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	585—591
§. 82. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	591—597
§. 83. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	597—603
§. 84. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	603—609
§. 85. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	609—615
§. 86. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	615—621
§. 87. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	621—627
§. 88. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	627—633
§. 89. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	633—639
§. 90. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	639—645
§. 91. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	645—651
§. 92. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	651—657
§. 93. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	657—663
§. 94. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	663—669
§. 95. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	669—675
§. 96. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	675—681
§. 97. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	681—687
§. 98. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	687—693
§. 99. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	693—699
§. 100. Die Differentialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts	699—705

Währung Nieuwenhuis (s. §. 10.) um so mehr gerechtfertigt ist, als aus dem Briefe von Herrn Dr. Gerhardt hervorgeht, dass derselbe Herr Mann nicht nur den Bernoulli's ersichtlich ist, wie selbst den Herrn Mann und sein Ansehen auf die Differenzrechnung interessirte.

So übergehe ich denn das Büchlein der Gefälligkeit mit dem Wunsche, dass es mir gelingen sein möge, etwas beigetragen zu haben zur Anregung und Erleichterung des Studiums der Geschichte der Mathematik; wobei ich nicht unthun kann, ganz besonders der auch leichter zugänglichen Acta Eruditorum von ihrem Beginn 1682 bis in den Anfang des 18ten Jahrhunderts als einer nicht genug zu beachtenden Fundgrube fruchtbarer Ideen zu gedenken. Hätte ich mein Ziel, denn möglichst nahe zu kommen ich mit dem mir zu Gebote stehenden Mitteln reichlich bestrebt gewesen bin, nur irgend erreicht, so würde ich mich, in der Ueberezeugung etwas Nützliches gefördert zu haben, hinlänglich belohnt fühlen.

Die Ausstattung, namentlich die Schärfe des Druckes, dürfte schwerlich etwas zu wünschen übrig lassen.

Bonn, Weihnachten 1855.

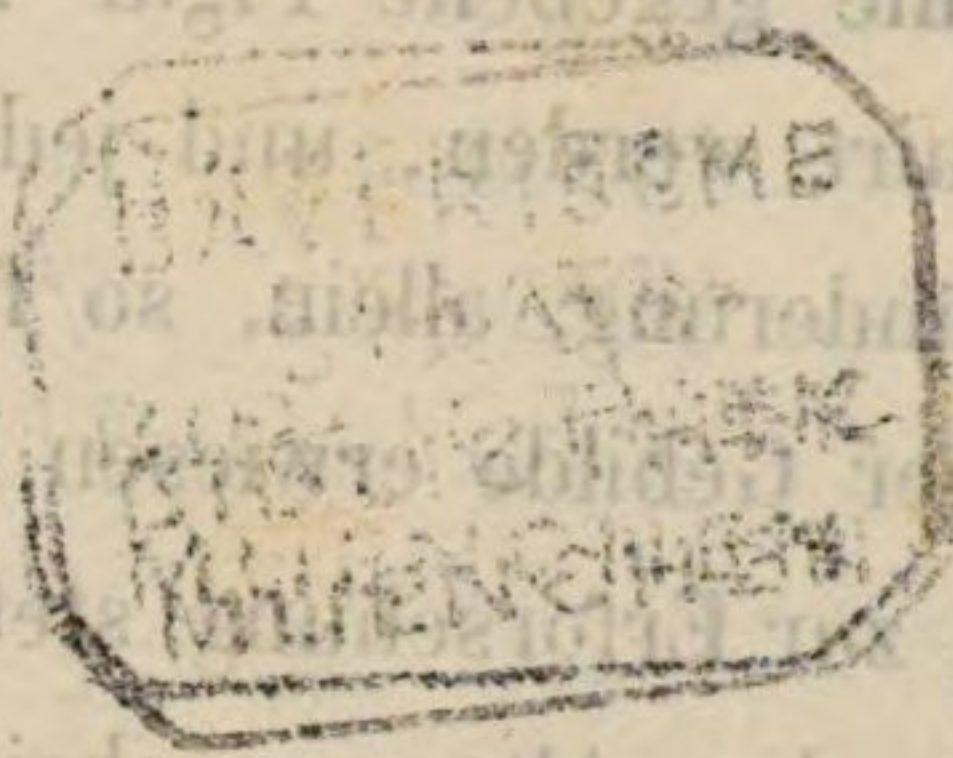
M. Wassenborn.

I n h a l t.

	<i>Seite</i>
Capitel I. Die Fluxionsrechnung	5—69
§. 1. Roberval's Methode	5—16
§. 2. Tiefere Begründung der Fluxionsmethode durch Barrow	16—21
§. 3. Ausbildung der Fluxionsmethode durch Newton	21—58
§. 4. Die Fluxionsmethode unter Maclaurin	58—69
Capitel II. Die Differenzialrechnung	70—160
§. 5. Die Methode des Gregorius a S. Vincentio	70—73
§. 6. Barrow's Tangentenmethode	73—77
§. 7. Einige unmittelbar vor Veröffentlichung von Leibnizens Differenzialrechnung aufgestellte Methoden	77—84
§. 8. Leibnizens Differenzialrechnung	84—115
§. 9. Die Differenzia'rechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts und die Bernoulli'sche Reihe	115—123
§. 10. Die Theorie Nieuwentiit's	123—138
§. 11. Die wichtigsten Sätze Taylor's	139—153
§. 12. Euler's Begründung der Differenzialrechnung	153—155
§. 13. Die Compensation der Fehler	155—160
Capitel III. Die Derivationsrechnung	160—166
§. 14. Lagrange's Derivationsrechnung	160—166

Inhalt.

Seite	
5—69	Capitel I. Die Fluxionsrechnung
5—18	§. 1. Roberval's Methode
18—21	§. 2. Tietere Begründung der Fluxionsmethode durch Barrow
21—52	§. 3. Ausbildung der Fluxionsmethode durch Newton
52—69	§. 4. Die Fluxionsmethode unter MacLaurin
70—160	Capitel II. Die Differenzialrechnung
70—73	§. 5. Die Methode des Gregorius u. S. Vincentio
73—77	§. 6. Barrow's Tangentenmethode
77—84	§. 7. Einige unmittelbar vor Veröfentlichung von Leibniz's Differenzialrechnung aufgestellte Methoden
84—115	§. 8. Leibniz's Differenzialrechnung
115—123	§. 9. Die Differenzialrechnung am Ende des 17ten Jahrhunderts und die Bernoulli'sche Reihe
123—138	§. 10. Die Theorie Newton's
138—153	§. 11. Die wichtigsten Sätze Taylor's
153—155	§. 12. Euler's Begründung der Differenzialrechnung
155—160	§. 13. Die Compensation der Fehler
160—166	Capitel III. Die Derivationsrechnung
160—166	§. 14. Lagrange's Derivationsrechnung



Einer der grössten Männer des siebzehnten Jahrhunderts war un-
 streitig René Descartes (1596—1650); denn er war es, der nicht allein
 der Philosophie eine neue Bahn brach, indem er sie von den Fesseln der
 mittelalterlichen Scholastik befreite, sondern auch den mathematischen Wis-
 senschaften ein ganz neues Feld eröffnete. Bis auf ihn hatte man sich auf
 eine Compilation, höchstens auf eine quantitative Erweiterung der von den
 Alten gefundenen geometrischen Sätze beschränkt, deren Methode nur dis-
 continuirliche Figuren zu behandeln erlaubte, und daher, wenn sie sich
 auch nur an die einfachsten der krummlinigen Gestalten, die Kegelschnitte,
 wagte, nur mit grosser Mühe einzeln dastehende Resultate an das Licht
 bringen konnte; Descartes war es, der den Grund legte zu einer metho-
 dischen Untersuchung der krummen Linien, und somit eine nicht allein
 quantitative, sondern auch, und dies ist das Wesentlichste, qualitative Er-
 weiterung der Wissenschaft herbeiführte. Fragen wir, wie es möglich war,
 dass er, ein Einzelner, dieselbe mehr förderte, als es ein ganzes Jahrtau-
 send vor ihm vermocht hatte, so ist die Antwort: ihn befähigte dazu die
 Erkenntniss eines einzigen Grundsatzes, zu der er gelangte, die Erkennt-
 niss nämlich, dass der Begriff der Veränderung in die Geometrie ein-
 zuführen sei. Descartes aber erkannte wohl, dass dieser Begriff, falls er
 zur Erforschung geometrischer Wahrheiten oder zur Erforschung der Eigen-
 schaften von Figuren, also Dingen, denen eine reelle Existenz ausserhalb
 des menschlichen Geistes zukommt, dienen soll, auch äusserlich darstellbar
 und der Rechnung zugänglich gemacht werden müsse. Zugleich aber
 konnte es ihm nicht entgehen, dass dies in der reinen Geometrie unmög-

lich ist. Denn in eine gegebene Figur können zwar neue Linien, Winkel u. s. w. hineinconstruirt werden, und jede Construction ist Bewegung, jede Bewegung aber Veränderung, allein, so fruchtbar sich diese Bemerkung bei Betrachtung unstetiger Gebilde erwiesen hatte, so fruchtlos waren alle Versuche geblieben, sie zur Erforschung stetiger anzuwenden, denn hieran war ja eben die Methode der Alten gescheitert. Descartes musste sich also nach einem andern Theile der Mathematik umsehen, der einerseits geschmeidig genug sei, um für die äusserliche Darstellung des Begriffes der Veränderung dienlich zu sein, andererseits aber auch eine Anwendung auf die Geometrie zulasse. Da nun kurz vorher Vieta (1540—1603) durch Einführung der Buchstaben statt der Zahlen der Arithmetik ihre wissenschaftliche Gestalt verliehen hatte, da ferner Descartes gerade durch arithmetische Forschungen, über die Auflösung der Gleichungen, zur Erkenntniss des Begriffs der Veränderung gelangt war, da ferner die Arithmetik, als ein reines Product des menschlichen Geistes, frei von den Beschränkungen, die die Natur des Raumes der reinen Geometrie auferlegt, sich weit eher als diese zur Darstellung eines Gedankens eignet, war es natürlich, dass er in ihr den Theil der Mathematik erblickte, dessen er bedurfte. Indem also Descartes die charakteristische Eigenschaft einer jeden Curve durch eine arithmetische Formel ausdrückte, in welcher zwei veränderliche Grössen enthalten sind, eine Methode, die unter dem Namen „Analytische Geometrie“ bekannt ist, hatte er zugleich den Anstoss zu einer Entwicklung der mathematischen Disciplinen gegeben, die er selbst, wenigstens Anfangs, schwerlich geahnt hat. Einmal nämlich ward durch das Postulat, in einer einzigen arithmetischen Formel mittelst des Begriffs der Veränderung die charakteristischen und mithin auch alle aus ihr folgenden Eigenschaften einer Curve darzustellen, in die Arithmetik der Begriff der Function eingeführt, durch den sie sich zur Analysis erhebt, sodann waren jetzt Arithmetik oder Analysis und Geometrie in eine Wechselwirkung getreten, vermöge welcher kein Fortschritt in dem einen Theile ohne einen entsprechenden Fortschritt im anderen möglich ist. Es liegt mithin ein doppelter Weg vor, entweder vom Begriffe der Function ausgehend die Natur der Curven zu untersuchen; dies ist offenbar das Schwierigste und Abstracteste, woher es denn kommt, dass diese Methode am spätesten ausgebildet wurde; sie ist das Princip der von Lagrange auf-

gestellten Derivations-Rechnung; oder aber, von der Geometrie und ihren Postulaten geleitet, die Arithmetik und Analysis weiter auszubilden, eine Methode, die, Differenzial- und Integral-Rechnung genannt, ihren Ursprung dem grossen Leibniz verdankt. Allein auch der letzteren setzten sich Schwierigkeiten entgegen, die Anfangs unüberwindlich schienen und, wie erwähnt, erst durch Leibniz, mithin mehr als hundert Jahre nach der Einführung der analytischen Geometrie in die Mathematik, besiegt wurden.

Dagegen schien auf den ersten Anblick eine dritte Methode viel zu versprechen. Es ist bereits oben erwähnt worden, dass Descartes den Begriff der Veränderung nur mit Hülfe der Arithmetik in die Geometrie einzuführen vermochte. Allein es konnte nicht unbemerkt bleiben, dass dies noch auf eine andere Weise möglich sei, nämlich dadurch, dass man eine gegebene Figur vor dem Auge des Geistes erst entstehen lässt, mithin sich in den Process des Werdens versetzt. Denn das Entstehen oder Werden ist ja eine Veränderung. Diese kann aber nicht gedacht werden ohne Bewegung. Es lag mithin nahe, sich zur Erforschung der Eigenschaften der krummlinigen Gestalten statt der Arithmetik, wie es Descartes gethan, der reinen Bewegungslehre oder Phoronomie zu bedienen. Dieser Methode nun, Fluxions-Rechnung genannt, wandten sich alle diejenigen zu, denen die Cartesische Lehre nicht zusagte, die aber sich über die Geometrie der Alten erheben wollten; sie war es ferner auch, die, wahrscheinlich ihrer grösseren Anschaulichkeit wegen, am Frühesten versucht wurde und am Frühesten zu wichtigen Resultaten führte. Ihre schönste Frucht sind Newton's „Principia philosophiae naturalis mathematica“. Hiermit aber hatten ihre Erfolge den Culminationspunkt erreicht und sie ward durch die Leibnizische Differentialrechnung aus Gründen, die sich im Folgenden ergeben werden, verdrängt.

Indem es nun der Zweck vorliegender Schrift ist, die Ausbildung der Principien der höheren Analysis historisch zu entwickeln und kritisch zu beleuchten, so zerfällt dieselbe dem Bisherigen zufolge naturgemäss in drei Abschnitte, die, in chronologischer Reihenfolge geordnet, die obigen drei Methoden, die Fluxionsrechnung als die zuerst zur Ausbildung gelangte, die Leibnizische Differenzial- und Integralrechnung als die nächste, und endlich Lagrange's Derivationsrechnung behandeln. Die beiden ersten ver-

danken ihren Ursprung, wie im Vorhergehenden erwähnt worden ist, der Geometrie, indem der erste Anstoss zu ihnen durch geometrische Probleme gegeben ward. Von der Menge derselben waren es besonders drei, die von den Zeiten Descartes bis auf Leibniz alle Mathematiker auf das Lebhafteste beschäftigten und deren Lösung eben auf die Entdeckung der Fluxions- und Differenzialrechnung führten. Diese drei Probleme sind: 1) Eine Methode zu finden, mittelst deren an jeden Punkt jeder Curve eine Tangente gelegt werden kann; das s. g. Tangentenproblem; 2) eine Methode zu finden, durch die der höchste oder tiefste Punkt einer Curve bestimmt werde: das Problem der Bestimmung der Maxima und Minima, und 3) eine Methode aufzustellen, durch welche eine krummlinig begrenzte Fläche ihrem Inhalte nach ermittelt werden kann, das Problem der Quadratur. Die erste dieser Aufgaben hatte bereits Descartes für Curven, deren Gleichung ein algebraischer, rationaler Ausdruck ist, gelöst, für alle anderen hingegen hatten sich ihm unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg gestellt und er hatte, unter dem Vorwande, alle anderen Curven (die allerdings meist in der Mechanik vorkommen) seien mechanische, die Lösung der genannten drei Probleme für dieselben sei also eine Aufgabe nicht der Geometrie sondern der Mechanik, die Schwierigkeit zu umgehen und von sich abzuwenden gesucht. Das zweite Problem hatte der auch in anderen Theilen der Mathematik ausgezeichnete Peter Fermat wenigstens für einfache Fälle gelöst. Die dritte Aufgabe war ebenfalls, aber nicht ohne manchen Zweifel übrig zu lassen, von Cavalieri (1598 — 1647) erledigt worden*). Immer aber mangelten noch für alle drei Probleme allgemeine Methoden, durch die in allen Fällen die Lösung herbeigeführt werden konnte, und sie bildeten daher noch immer den Mittelpunkt, um den sich die Kräfte der vorzüglichsten der damaligen Mathematiker gruppirten, und sind daher bei der Schilderung sowohl der Fluxions- als der Differenzialrechnung vorzüglich zu berücksichtigen.

*) Die genannten Lösungen von Descartes, Fermat, Cavalieri finden sich dargestellt in: Dr. C. I. Gerhardt's „Geschichte der Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz“, Halle 1848 und in desselben: „Die Entdeckung der höheren Analysis“, Halle 1855.

Capitel I.

Die Fluxionsrechnung.

§. 1.

Roberval's Methode.

Der erste, der, gegen die Geometrie des Descartes Opposition machend, sich eine eigenthümliche auf den Begriff der Bewegung gegründete Methode bildete, mittelst welcher er das Tangentenproblem zu lösen versuchte und in mehreren Fällen auch wirklich löste, war Roberval (1602—1675). Der Gedankengang*), den er befolgte, war etwa folgender: Zunächst setzt er kurz die Fundamentalbegriffe der Mechanik auseinander, unter denen jedoch gerade derjenige, der für sein Verfahren von der grössten Wichtigkeit ist, der Begriff der „Geschwindigkeit“, fehlt, und erklärt das Parallelogramm der Kräfte. Hierauf wendet er sich zu der eigentlichen Aufgabe, nämlich zum Tangentenproblem und stellt über dasselbe folgendes Prinzip auf: Jede Curve lässt sich durch Bewegung eines Punkts entstanden denken; aus der Art und Weise nun, wie sie (die Curve) construirt wird, lassen sich die Kräfte, die an jeder Stelle d. h. an jedem Curvenpunkte auf den beschreibenden Punkt wirken, sowohl ihrer Grösse als ihrer Richtung nach bestimmen; werden diese Kräfte nach dem Gesetze des Parallelogramms vereinigt, so muss die Richtung der so erhaltenen Resultante die Richtung der Tangente im betreffenden Curvenpunkte sein. Ein Beispiel mag dies erläutern. Es sei die Tangente an einem Punkte P (Fig. 1.) der Apollonischen Parabel gesucht. Die Construction derselben stützt sich nun bekanntlich auf die Eigenschaft dieser Linie, dass die Leitstrahlen FP von einem Punkte F , der der Brennpunkt heisst, nach dem Curvenpunkte P gleich sind dem Abstände PQ desselben Punktes P von einer Geraden, die in einer Entfernung $AO = AF$, wenn A der Scheitel ist, senkrecht zur Parabelachse gezogen ist, und Directrix heisst. Man construirt also die Parabel, indem man in den Punkten der Achse, z. B.

*) Sein Verfahren findet sich in den: „Mémoires de l'académie royale des sciences. Depuis 1666 jusqu'à 1699. Paris, 1730. Tome VI. in einem Aufsatz: „Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes“ niedergelegt.

in M Parallele zur Directrix zieht, und dann von F aus mit dem Halbmesser OM einen Kreis schlägt, der mithin die in M errichtete Ordinate in Punkten der Parabel schneidet. Denken wir uns nun, der beschreibende Punkt habe am Orte P zwei Bewegungen, die eine in der Richtung des Leitstrahls FP , die andere in der Richtung der Achse oder der Linie QP ; so folgert Roberval aus der Bedingung, dass stets $QP = FP$ sein muss, dass auch die Geschwindigkeiten in den Richtungen dieser beiden Geraden gleich sein müssen, dass mithin die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit und also auch der Tangente gefunden werde, indem man den Winkel FPQ halbt. Complicirter wird das Raisonement, durch welches Roberval an die Conchoide, Cissoide und Archimedeische Spirale Tangenten zu legen suchte; besonderen Werth aber legte er darauf, dass es ihm gelungen war, auch für die Cycloide, eine Curve, die wegen der Schwierigkeiten, die sie den Mathematikern der damaligen Zeit entgensetzte, bei denselben Berühmtheit erlangt hatte, das Tangentenproblem zu lösen. Es wird daher nicht ohne Interesse sein, Roberval's Verfahren auch bei dieser scheinbar *) verwickelten Curve zu beschreiben. Zunächst wird wieder die Definition derselben aufgestellt, und zwar folgendermassen. Auf einer Geraden AB (Fig. 2.) gleite ein Kreis mit dem Halbmesser $mB = r'$ hin ohne zu rotiren, und zwar gleite er mit der linearen Geschwindigkeit C ; zugleich aber bewege sich ein beweglicher Punkt auf der Peripherie des gleitenden Kreises mit der ebenfalls linearen Geschwindigkeit c . Je nachdem nun $c < C$, $c = C$, $c > C$ ist, ist die Bahn, die der bewegliche Punkt vermöge der doppelten, nämlich einmal der geradlinigen, sodann der Kreis-Bewegung beschreibt, bezüglich eine verkürzte, gemeine, verlängerte Cycloide; eine Definition, deren Richtigkeit sich leicht nachweisen lässt, indem sie auf die bekannten Gleichungen dieser Curven führt **). Nehmen wir der

*) Bei genauerer Untersuchung stellt es sich heraus, dass die Cycloidenarten wegen der Eleganz und Anschaulichkeit ihrer Entstehungsweise, worin sie leicht die Kegelschnitte übertreffen dürften, jedenfalls unter die Curven gehören, die sich zur Anwendung der Roberval'schen Methode am besten eignen. Ja, es lässt sich bei ihnen mittelst derselben sogar der Krümmungshalbmesser auffinden, wie ich diess in meiner Schrift: „Die cyclischen Curven etc.“ nachzuweisen versucht habe.

**) Hat sich nämlich der gleitende Kreis in der Zeit t von A nach B

Einfachheit wegen an, die Geschwindigkeiten C und c seien gleich, und nennen den Halbmesser des gleitenden Kreises mB , r , so ergibt sich für die dann entstehende gemeine Cycloide folgende Construction: Man mache AC (Fig. 3.) gleich dem Umfange des rollenden Kreises und theile dann sowohl AC als den Kreis in dieselbe Anzahl gleicher Theile und ziehe in der Höhe des Halbmessers OB eine Parallele NN_6 zur Basis AC , die von den in den Theilungspunkten $A_1, A_2, \dots$ errichteten Perpendikeln in den Punkten $N_1, N_2, \dots$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt wird. Dann ziehe man $N_1P_1 \parallel OB_1, N_2P_2 \parallel OB_2$, u. s. w. und mache die Linien $N_1P_1 = N_2P_2 = \dots$ gleich dem Halbmesser r des gleitenden Kreises; dann ist die durch die Punkte $P_1, P_2, \dots$ bestimmte Linie eine Cycloide (von Roberval auch Trochoide oder roulette genannt). Der beschreibende Punkt des erzeugenden Kreises hat nun an jedem Orte P zwei Bewegungen, die eine parallel zur Basis AC gerichtet und hervorgerufen durch das Gleiten des Erzeugungskreises, die andere in der Richtung der Tangente des Punkts P an demselben, hervorgerufen durch die kreisende Bewegung des beschreibenden Punktes. Indem nun der Voraussetzung nach diese zwei componirenden Geschwindigkeiten gleich sind, wird die Diagonale des aus den beiden gleichen Componenten PD und PE construirten Parallelogramms den Winkel DPE halbiren müssen, und sie ist zugleich die verlangte Tangente an die Cycloide.

Wie man sieht, hat Roberval in der Erläuterung seiner Methode die

bewegt, so ist die Strecke $AB = Ct$. Hat ferner der bewegliche Punkt anfangs in A gestanden, so ist Bogen $BP = ct$, mithin, da $Bm = r'$ ist,

$\angle BmP = \frac{ct}{r'}$; folglich die Abscisse AM des Punkts P , die x heisse: $x =$

$Ct - r' \sin \left(\frac{c}{r'} \cdot t \right)$, und die Ordinate MP , oder y , ist $y = r' - r' \cos \left(\frac{c}{r'} \cdot t \right)$;

Setzt man nun $\angle BmP$ oder $\frac{c}{r'} t = w$, also $t = \frac{r' \cdot w}{c}$, so wird $x = \frac{C}{c} r' \cdot w -$

$r' \sin w$; $y = r' - r' \cos w$; oder wenn wir $\frac{C}{c} r' = r$ setzen: $x = r \cdot w - r'$

$\sin w$; $y = r'(1 - \cos w)$. Das sind aber die Gleichungen einer verkürzten

oder verlängerten Cycloide, so lange $C \leq c$, also $r \geq r'$ ist. (Vergl. meine

„Cyclischen Curven etc.“ §. 8. 8) sowie pag. 37 — 39). Wird aber $C = c$,

also $r = r'$, so erhält man die gemeine Cycloide.

Begriffe von „Kraft“ und „Geschwindigkeit“, indem er sie als identische gebraucht, nicht hinlänglich geschieden, und sich öfter des noch allgemeineren Ausdrucks „Bewegung“ an ihrer Statt bedient. Wenn nun schon durch diesen, übrigens sehr verzeihlichen Umstand — man weiss ja, wie lange es dauerte, ehe die Grundbegriffe der Mechanik zur Klarheit gelangten — die Durchsichtigkeit seiner Darstellung getrübt wird, so geschieht dies noch mehr aus folgender Ursache: Es wird Niemand entgangen sein, um wie vieles weniger deutlich und anschaulich die Anwendung seines Verfahrens auf die Parabel als auf die Cycloide ist. Der Grund hiervon scheint dieser zu sein. Bei der ersten Curve nimmt Roberval dieselbe als gegeben, als vorliegend an und sagt nur, sie hat bekanntlich die Eigenschaft, dass die Entfernung jedes ihrer Punkte vom Brennpunkte gleich ist dem Abstände von der Directrix, und dieser Gedanke liegt nun seinem Beweise zu Grunde. Ganz anders verhält es sich mit der Definition der Cycloide; denn durch diese sind wir genöthigt, die Cycloide nicht als gegeben und vorliegend zu betrachten, sondern sie in Gedanken erst entstehen zu lassen. Diese Verschiedenheit rührt offenbar davon her, dass letztere Definition die Vorstellung der Bewegung, die der ganzen Methode zu Grunde liegt, schon in sich enthält, so dass die Anwendung derselben nicht mit der Definition im Widerspruch steht, wie es bei der Parabel der Fall ist, wo wir plötzlich genöthigt werden, in eine schon fertige und vorhandene Curve eine Bewegung hineinzudenken. Wir können daher als Grundsatz aussprechen: Die Fluxionsmethode Roberval's kann mit Klarheit und ohne Zwang nur dann angewandt werden, wenn eine Definition zu Grunde gelegt worden ist, die die Vorstellung einer continuirlichen Bewegung involvirt. Es soll aber hiermit keineswegs gesagt werden, dass ihr Gebrauch nur auf eine kleine Anzahl Linien beschränkt sei, denn bekanntlich lässt sich eine und dieselbe Curve meistens, man kann wohl sagen immer, auf verschiedene Weise entstanden denken und also auf verschiedene Weise definiren. Es ist daher mit dem eben ausgesprochenen Theoreme nur behauptet worden, dass man, um das in Rede stehende Verfahren mit Deutlichkeit anzuwenden, erst eine solche Definition suchen oder auswählen muss, die die Vorstellung einer, und zwar ununterbrochenen, Bewegung in sich enthält. Da nun eine jede Definition eine Construction zulässt und bedingt,

so liegt im Vorigen zugleich die Behauptung: dass auch nicht jede Construction sich zur Grundlage unseres Verfahrens eignet, sondern nur die aus einer der angegebenen Bedingungen genügenden Definition hervorgegangene. Ein Beispiel mag zur Erläuterung dienen. Bekanntlich entsteht die Cissoide folgendermassen: Am Ende D (Fig. 4.) des Durchmessers AD eines Kreises wird eine Senkrechte auf denselben errichtet und vom Punkte A aus nach jedem Punkte E derselben eine Gerade gezogen. Wird nun auf einer solchen Linie AE von E aus ein Stück $EP = AB$ abgeschnitten, so ist die Cissoide der geometrische Ort der so erhaltenen Punkte P . Aus dieser Erklärung der Cissoide würde es schwer sein, ohne unklare Elemente beizumischen, die Lage der Tangente nach Roberval's Methode zu ermitteln. Wir müssen uns daher nach einer andern Definition umsehen. Eine solche ist denn auch nicht schwer zu finden. Man erinnert sich nämlich, dass dieselbe Curve auch so construirt werden kann: Auf die vom Punkte A aus gezogene Linie AE werde in A ein Perpendikel AC errichtet und vom Durchschnittspunkte C desselben mit der Kreisperipherie ein Loth auf den Durchmesser AD gefällt. Dasselbe schneidet (in seiner Verlängerung) die Linie AE in einem Punkte P und der geometrische Ort der so gefundenen Punkte P ist wieder die Cissoide. Bei näherer Untersuchung dieses Verfahrens zeigt sich, dass dies der geometrische Ausdruck für folgende Definition der Cissoide ist: Es sei ein rechter Winkel UAV gegeben, dessen einer Schenkel AU anfangs durch den Mittelpunkt O eines Kreises geht, während der andere Schenkel AV denselben in A berührt. Nun drehe sich der gegebene rechte Winkel um den festen Scheitel A , und zugleich bewege sich von A aus auf dem Schenkel AU , der sich um den Winkel u aus seiner Anfangslage herausbewegt und die Lage AU' angenommen haben mag, ein beweglicher Punkt mit einer solchen Geschwindigkeit, dass die Verlängerung eines von ihm auf DA gefällten Perpendikels den Durchschnittspunkt C der Kreisperipherie mit dem andern Schenkel AV , der sich ebenfalls um den Winkel u gegen seine frühere Lage gedreht hat und in die Lage AV' gekommen ist, trifft. Der sich fortbewegende Punkt wird dann offenbar die Cissoide beschreiben. Hieraus lässt sich nun leicht die Lage der Tangente an jedem Punkte P derselben bestimmen. Der beschreibende Punkt hat nämlich offenbar das Bestreben, sich in zwei Richtungen zu be-

wegen; einmal sucht er, vermöge der Rotation des Schenkels AU , auf dem er sich befindet, in der Richtung der Tangente eines mit dem Radius AP beschriebenen Kreises, also senkrecht zu AP , nach G zu sich zu bewegen; zweitens strebt er, in der Richtung von AP selbst weiter zu gehen. Diese beiden Richtungen schliessen offenbar einen rechten Winkel ein. Es kommt nun darauf an, das Verhältniss der Geschwindigkeiten ausfindig zu machen, mit denen er in jeder dieser zwei Richtungen fortzugehen sucht. Für die Richtung PG , die also senkrecht zu AP ist, ist nun die lineare Geschwindigkeit leicht zu berechnen. Sie ist nach einem der Fundamentalsätze der Dynamik, wenn die, constante oder veränderliche, Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Schenkel des rechten Winkels drehen, w genannt wird, gleich $AP \cdot w$. Bezeichnen wir sie also durch c_1 , so erhalten wir die Gleichung:

$$c_1 = AP \cdot w.$$

Um nun die Geschwindigkeit c_2 in der Richtung AP zu finden, haben wir AP durch u auszudrücken. Nun ist:

$$AP = \frac{AM}{\cos u}$$

oder, da, wenn r der Radius des gegebenen Kreises ist,

$$AC = 2r \cdot \sin u$$

$$\text{und} \quad AM = 2r \cdot \sin^2 u$$

$$\text{ist, so ist:} \quad AP = 2r \cdot \frac{\sin^2 u}{\cos u}$$

Mittelst dieses Werthes für AP können wir nun sowohl c_1 als c_2 durch u ausdrücken. Zunächst nämlich wird:

$$c_1 = 2r \cdot \frac{\sin^2 u}{\cos u} \cdot w.$$

Insofern nun unter Geschwindigkeit der Grenzwert des Differenzquotienten von Raum und Zeit, also der Differenzialquotient verstanden wird, ergibt sich aus dem Werthe für AP durch Differenziren nach der Zeit, die t heissen mag, die Geschwindigkeit c_2 ; es wird also:

$$c_2 = 2r \cdot \frac{2 \sin u \cdot \cos^2 u + \sin^3 u}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dt};$$

was sich übrigens auch ohne Differenzialrechnung beweisen liesse. Nun ist aber $\frac{du}{dt}$ als Differenzialquotient des in der Zeit t durchlaufenen Winkels

u nach t nichts anderes als der Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit w . Wir können also auch sagen, es ist:

$$c_2 = 2r \cdot \frac{2 \sin.u \cdot \cos.^2u + \sin.^3u}{\cos.^2u} \cdot w.$$

Nun lässt sich der Werth für c_1 offenbar schreiben:

$$c_1 = 2r \cdot \sin.u \cdot \tan.u \cdot w$$

und der Werth für c_2 :

$$c_2 = \left(4r \cdot \cos.u + 2r \cdot \frac{\sin.^2u}{\cos.u} \right) \cdot \tan.u \cdot w.$$

Es verhält sich also;

$$c_1 : c_2 = 2r \cdot \sin.u : 4r \cdot \cos.u + 2r \cdot \frac{\sin.^2u}{\cos.u}$$

oder, da $2r \sin.u = AC$; $2r \cdot \frac{\sin.^2u}{\cos.u} = AP$ war und offenbar $2r \cdot \cos.u =$

$CD = AB$ ist:

$$c_1 : c_2 = AC : 2 \cdot CD + AP.$$

Nehmen wir also AC als Maass der in der Richtung PG vorhandenen Geschwindigkeit, so wird die in der Richtung AP vorhandene Geschwindigkeitscomponente gemessen durch eine Linie, deren Länge $= 2 \cdot CD + AP = 2 \cdot AB + AP$ ist. Ziehen wir daher, indem $PG \parallel CA$ ist, durch A eine Parallele zu PC , so wird $PG = AC = c_1$. Wird ferner von B eine Linie BB' parallel zu AD gezogen und CD bis zum Durchschnitte B' mit dieser Linie verlängert, so wird offenbar $CB' = 2 \cdot CD$. Wird also $Bf \parallel PC$ gezogen, so wird auch $Pf = 2 \cdot CD$, und wenn wir nun $fF = AP$ machen, so wird $PF = 2 \cdot CD + AP = c_2$. Wird daher aus PG und PF das Parallelogramm construirt, so stellt seine Diagonale PH die nach der Zeit t vorhandene Curvengeschwindigkeit des beschreibenden Punktes dar, nach demselben Maasse gemessen, wie c_1 und c_2 , und ihre Richtung ist zugleich die Richtung der Tangente im Punkte P der Cissoide. Dass diess in der That so ist, lässt sich leicht rückwärts nachweisen. Nennen wir nämlich den Winkel, den die Linie PH mit dem Durchmesser AD macht, τ , so ist offenbar:

$$\tan.\tau = \cotang. \left[\operatorname{Arctang.} \left(\frac{c_2}{c_1} \right) - u \right];$$

$$\text{oder: } \tan.\tau = \frac{1 + \frac{c_2}{c_1} \cdot \tan.u}{\frac{c_2}{c_1} - \tan.u}.$$

Nennen wir nach der Methode der analytischen Geometrie die Linie AM die Abscisse und bezeichnen sie durch x , die Linie MP die Ordinate und bezeichnen sie durch y , so ist bekanntlich die Gleichung der Cissoide:

$$y = x \sqrt{\frac{x}{2r-x}}.$$

Ferner wird: $\text{tang.} u = \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$; $\sin. u = \sqrt{\frac{x}{2r}}$; $\cos. u = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$; also

$$AC = 2r \cdot \sin. u = \sqrt{2r \cdot x};$$

$$2 \cdot CD = 4r \cdot \cos. u = 2 \cdot \sqrt{2r(2r-x)};$$

$$AP = \frac{x}{\cos. u} = x \sqrt{\frac{2r}{2r-x}};$$

mithin: $2 \cdot CD + AP = 2 \sqrt{2r(2r-x)} + x \sqrt{\frac{2r}{2r-x}} =$

$$\frac{4r-2x+x}{\sqrt{2r-x}} \cdot \sqrt{2r} = \frac{4r-x}{\sqrt{2r-x}} \cdot \sqrt{2r};$$

also wird: $\frac{c_2}{c_1} = \frac{4r-x}{\sqrt{x(2r-x)}};$

$$1 + \frac{4r-x}{\sqrt{x(2r-x)}} \cdot \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

und $\text{tang.} \tau = \frac{4r-x}{\sqrt{x(2r-x)}} \cdot \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$

$$\text{oder} \quad \text{tang.} \tau = \frac{3r-x}{2r-x} \sqrt{\frac{x}{2r-x}}.$$

Es ist aber bekanntlich auch $\text{tang.} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(x \sqrt{\frac{x}{2r-x}}\right)}{dx}$. Wird diese

Differenziation ausgeführt, so erhält man denselben Werth $\frac{3r-x}{2r-x} \cdot \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$

für $\text{tang.} \tau$. Es mag zugleich dieses Beispiel noch als Beleg für einen grossen Vortheil der Methode Roberval's dienen, der darin besteht, dass dieselbe stets auf eine Construction führt, während, wenn nach der Methode der analytischen Geometrie erst die Gleichung der Curve gesucht und dann die Ordinate nach der Abscisse differenzirt wird, ein Ausdruck hervorgeht, dessen geometrische Bedeutung erst gesucht, der, wie sich schon Chasles in seiner „Geschichte der Geometrie“ ausspricht, aus der Arith-

metik erst wieder in die Geometrie übersetzt werden muss. Indem so Roberval's Methode jedenfalls eine grössere Anschaulichkeit gewährt, indem sie eine Berücksichtigung der speciellen Individualität jeder einzelnen Curve erfordert, folgt zugleich, dass sie die Aufstellung eines allgemeinen, für alle Linien gültigen Gesetzes nicht zulässt und die Lösung des Tangentenproblems dem Scharfsinne des Mathematikers überlässt, wodurch aber wiederum ein gedankenloses Operiren mit todtten Formeln vermieden und unmöglich gemacht wird.

Mit dem oben angeführten zweiten Problem, der Bestimmung der Maxima und Minima, scheint sich Roberval nicht beschäftigt zu haben, wohl aber mit der dritten, der Quadratur der Curven, und zwar bediente er sich hierbei eines der Cavalieri'schen Methode des Untheilbaren ganz ähnlichen Verfahrens. In einem Briefe an Toricelli, mit dem er wegen der Priorität der Entdeckung einiger Sätze über die Cycloide in einen Streit gerathen war, der, wenigstens von Seiten Roberval's, mit vieler Gehässigkeit geführt wurde, wie aus dem hier erwähnten Schreiben: „Epistola Aegidii Personnerii de Roberval ad evangelistam Toricellium“ hervorgeht*), nimmt er auch das Prioritätsrecht der Erfindung der „Indivisibilia“ für sich in Anspruch, in deren Besitz er lange, ehe Cavalieri die seinige veröffentlicht habe, gewesen zu sein behauptet. Zugleich setzt er hinzu, seine (Roberval's) Methode sei darin von der Cavalerischen verschieden, dass er die Grössen nur als aus ihnen homogenen unendlich kleinen Grössen entstanden gedacht wissen wolle, also Linien aus unendlich vielen und unendlich kleinen Linien, Flächen aus kleinen Flächen u. s. w., während Cavalieri Flächen aus Linien, Linien aus Punkten u. s. w. zusammengesetzt sein lasse. Hiermit aber stimmt keineswegs überein, was er in seiner Abhandlung „Traité des indivisibles“**) sagt, wo er sich dahin ausspricht, dass, da alle Linien durch Punkte bestimmt seien, man sich, wenn es sich um das Verhältniss

*) Der Verdruss über diesen allerdings ebenso derben als beissenden Brief soll die Ursache von Toricelli's bald darauf erfolgtem Tode gewesen sein.

**) Genannter Brief, sowie die Abhandlung: „Traité des indivisibles“ befinden sich in dem oben angeführten Tome VI. der „Mémoires de l'académie royale etc.“. Die wichtigsten der hierher gehörigen Stellen befinden sich in Gerhardt's „Entdeckung der höheren Analysis. Halle 1855“ pag. 30 und 31 abgedruckt.

einer Linie z. B. zu einer anderen handle, statt der Vorstellung von unendlich vielen kleinen Linien der Vorstellung von unendlich vielen Punkten, bei Flächen der Vorstellung von Linien, bei Körpern der von Flächen bedienen könne; eine Auffassung, die sich von der Darstellung Cavalieri's kaum unterscheiden dürfte. Uebrigens, setzt Roberval hinzu, sei es nicht nöthig, dass die indivisibilia als unter einander gleich angenommen würden, sie könnten auch das Gesetz irgend einer Progression befolgen, z. B. das der natürlichen Zahlen, der Quadrate, der Cuben u. s. w.; wenn dieses Gesetz bestimmt sei, liessen sich auch über die so entstandenen Flächen Regeln aussprechen. Es mögen z. B. die indivisibilia nach dem Gesetze der natürlichen Zahlen fortgehen, so dass also das zweite indivisible EF (Fig. 5) doppelt, das dritte, GH , dreimal, das vierte, AB , viermal so gross ist, als das erste Element C ; dann, behauptet Roberval, sei die durch diese unendlich kleinen Linien oder Punkte bestimmte Fläche, also das Dreieck CAB halb so gross als das Quadrat des grössten Elements AB , also gleich der Hälfte des Quadrats $CDBA$; wenn aber die elementaren Linien nach dem Quadrate fortschritten, so dass also die erste $C=1$, die zweite $EF=4$, die dritte $GH=9$ u. s. w. sei, so sei das Dreieck CGH (Fig. 6) der dritte Theil des Quadrats des letzten Linienelements, also hier der dritte Theil des Quadrats $AGHD$ von GH ; denn die Fläche des Dreiecks CGH sei $= 27$, das Quadrat der GH sei $= 81$; mithin verhalte sich die erstere zu letzterer wie $1:3$. Wie dies, namentlich der eben erwähnte Satz, zu begreifen sei, dürfte schwer zu ermitteln sein. Ueberhaupt werden wir wohl Roberval's Verdienste in Bezug auf diese seine Theorie denen Cavalieri's unterordnen müssen, sowie wir ihn auch schwerlich von allzugrossem Ehrgeize freisprechen können. Wichtiger als diese seine theoretischen Untersuchungen ist die Art und Weise, wie er den Flächeninhalt der Cycloide bestimmte, eine Aufgabe, deren Lösung der grosse Galilei, der Lehrer Toricelli's vergebens versucht hatte. Roberval löst in seiner Abhandlung „De trochoide“ *) dieselbe folgendermaassen: Er geht wieder von der Construction der in Rede stehenden Curve aus und giebt dieselbe so: Wenn der Bogen ON_1 (Fig. 7) des durch seine Umrollung die Cycloide beschreibenden Rades abgewälzt ist, so dass die Linie OM_1 gleich

*) Mémoires de l'académie royale des sciences. Tome VI.

Zu Fig. 5
 $(1 + (n-1) \times 2) \times n$
 $= \frac{n^2}{2}$ mit $n = \infty$

Zu Fig. 6
 $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$
 $= \frac{n^3}{3}$ mit $n = \infty$

möchte ich
 Einigkeit anerkennen
 Klein s. d. n. 18
 J. entlofen
 Abscheinungsgründe

dem Bogen ON_1 geworden ist, befindet sich offenbar der Mittelpunkt des wälzenden Kreises, der Anfangs in R_2 stand, auf einer in M_1 zur Basis errichteten Senkrechten, und zwar in der Höhe r , wenn r der Kreishalbmesser ist, der beschreibende Punkt aber, der Anfangs in O stand, befindet sich in derselben Höhe über der Basis, wie der Punkt N_1 , er liegt also auf einer durch N_1 zur Basis parallel gezogenen Linie, die das in M_1 errichtete Loth in Q_1 schneidet. Zugleich steht er, wie man sich leicht überzeugt, um eine Strecke $P_1Q_1 = R_1N_1$ von M_1Q_1 ab. Man findet also alle Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots$ der Cycloide, wenn man durch alle Punkte $N_1, N_2, N_3, \dots$ der Peripherie des gegebenen Kreises Parallele zur Basis zieht, auf letzterer die Stücke $OM_1, OM_2, OM_3, \dots$ bezüglich gleich den Bögen $ON_1, ON_2, ON_3, \dots$ macht, in den Punkten $M_1, M_2, M_3, \dots$ Senkrechte auf die Basis errichtet und von den so erhaltenen Schnittpunkten $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ aus die Längen $Q_1P_1, Q_2P_2, Q_3P_3, \dots$ bezüglich gleich $R_1N_1, R_2N_2, R_3N_3, \dots$ abträgt. Um nun die Fläche der Cycloide zu finden, verfährt Roberval folgendermaassen. Zuerst werden die Punkte $Q_1, Q_2, Q_3, P, \dots$ verbunden, wodurch eine Curve entsteht, die von ihm Gefährtin (*socia, comes*) der Cycloide genannt wurde, zwischen ihr und der Cycloide liegt also ein krummlinig begrenzter Raum, dessen Fläche er auf folgende Weise ermittelt. Da $Q_1P_1 = R_1N_1$, da ferner die Höhe M_1Q_1 des Flächenstücks OQ_1P_1 gleich ist der Höhe OR_1 des Flächenstücks OR_1N_1 des Kreises, schliesst er, dass die Fläche OQ_1P_1 gleich sei der Fläche OR_1N_1 , und dann weiter, dass die von der Cycloide und ihrer Gefährtin eingeschlossene Fläche OQ_2PP_2O als der Inbegriff solcher Stücke wie $P_1Q_1Q_2P_2$ gleich sei dem Halbkreise ON_2R , als dem Inbegriffe aller Stücke $R_1N_1N_2R_2 = P_1Q_1Q_2P_2$. Das Rechteck $OMPR$ wird aber durch die Gefährtin in zwei gleiche Theile getheilt, ferner ist nach einem Satze, den bereits Archimedes kannte, die Fläche eines Kreises gleich der eines Dreiecks, welches den Umfang zur Basis, den Radius zur Höhe, oder den halben Umfang zur Basis und den Durchmesser zur Höhe hat. Es ist also, da OM gleich dem halben Umfange des Kreises ist, das Rechteck $OMPR$ gleich der doppelten Kreisfläche, mithin seine Hälfte $OMPQ_2O$ gleich der Kreisfläche und die halbe von der Cycloide eingeschlossene Fläche $OMPP_2O$ das $1\frac{1}{2}$ fache, also die ganze Fläche das 3 fache des Wälzungskreises. Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich leicht überzeugen. Freilich aber ist Roberval's Ver-

fahren, namentlich die Schlüsse bei Vergleichung der Flächenelemente des von Cycloide und Gefährtin eingeschlossenen Raumes und des Halbkreises wenig überzeugend. Man urtheilt jedoch weniger streng über dasselbe, wenn man bedenkt, dass noch der grosse Galilei dieselbe Aufgabe nicht anders zu lösen vermochte, als dass er die fragliche Fläche mit der den rollenden Kreis bildenden Scheibe im Rohen ausmass, wohingegen Roberval's Methode, namentlich die glückliche Benutzung der Gefährtin, die nichts anderes als die s. g. Sinusversuslinie ist, und deren Gleichung, wenn die Abscissen OM_1, OM_2 , u. s. w. durch x , die Ordinaten M_1Q_1, M_2Q_2 , u. s. w. durch y bezeichnet werden, $y = r \left[1 - \cos\left(\frac{x}{r}\right) \right]$ heisst, den Stempel des Genies unverkennbar an sich trägt.

§. 2.

Tiefere Begründung der Fluxionsmethode durch Barrow.

Unstreitig tiefer begründete Isaac Barrow (1630—1677) seine ebenfalls auf das Princip der Bewegung gestützte Methode. Von seinen beiden Schriften: „*Lectiones geometricae*“*) und „*Lectiones mathematicae*. Londini 1683“ kommt hier hauptsächlich das erstere in Betracht; von dem letzteren mag nur bemerkt werden, dass er sich, wie Roberval, ebenfalls dahin ausspricht, man könne sich nicht Linien aus Punkten, Flächen aus Linien u. s. w., mit einem Worte nicht Grössen aus anderen ihnen heterogenen zusammengesetzt denken, und dass er sich bemühte, ein Criterium der Homogeneität aufzustellen, indem ihm das von Euclid aufgestellte nicht hinreichend schien. Wichtiger ist das erstere der genannten Werke. Begabt mit speculativem und philosophischem Geiste ging er von folgenden Principien aus. Er nahm die zu untersuchenden Figuren nicht als gegeben und vorliegend an, sondern liess sie, sich in den Process ihrer Bildung versetzend, erst gewissermassen vor seinen Augen entstehen. Das Ent-

*) Von diesem ziemlich seltenen Buche ist mir nur eine Englische Uebersetzung unter dem Titel: „*Isaac Barrow: Geometrical lectures*. 1670. Translated from the latin edition by Edmund Stone. London, 1735“ zugänglich gewesen.

stehen aber erklärte er, wie die Jonische Schule des Alterthums, als eine Bewegung. Eine solche aber kann nicht gedacht werden ohne die Vorstellung der Zeit. Zunächst also stellte er eine Definition auf, was unter letzterer zu verstehen sei, und erklärte sie als das Verharren der Dinge in ihrem Wesen, Zustand und Bewegung („continuation of the things in their being, state and movement“), eine Definition, die freilich schon deswegen unstatthaft ist, weil in ihr der Begriff der Bewegung, der ja eben durch den der Zeit erklärt werden soll, als bekannt vorausgesetzt wird. Wichtiger aber und zugleich richtiger ist die Aufstellung der für die Zeit charakteristischen Eigenschaft. Barrow findet diese in dem ununterbrochenen, stetigen und gleichmässigen Flusse derselben, und folgert hieraus sogleich, dass sie durch eine gleichförmige ^{specielle} Bewegung, z. B. der Fixsterne, gemessen werden könne. Weil aber ferner wegen dieser Gleichmässigkeit alle Theile der Zeit einander gleich sind, kann dieselbe, da sie zugleich ohne Ende verläuft, entweder mit einer unendlichen geraden Linie oder aber mit einem Kreise verglichen werden. Da jedoch letzterer in sich selbst zurückläuft, die Zeit aber immer weiter fortschreitet, schliesst Barrow, der Vergleich mit einer unendlichen Geraden sei der allein statthafte. Wir können uns also die Zeit unter dem Bilde einer Geraden vorstellen. Eine solche aber kann durch Fortschreiten eines Punktes entstanden oder entstehend gedacht werden und wenn dieses Fortschreiten gleichmässig geschieht, so wird jedem Momente der Zeit ein bestimmter Ort, an dem sich der in Bewegung begriffene Punkt befindet, also ein Punkt der Geraden entsprechen. Ferner kann eine Bewegung nicht gedacht werden ohne eine bewegende Kraft und dieser Begriff macht sich vorzüglich geltend, wenn von zwei Körpern der eine in derselben Zeit einen grösseren Raum durchläuft als der andere. Abstract gefasst lässt sich jedoch der Begriff der Kraft ebenso wenig wie der der Zeit in Rechnung ziehen. Sowie sich aber die Zeit durch eine Gerade darstellen lässt, so, fährt Barrow fort, sei statt der Kraft die Geschwindigkeit (als Maass derselben) anzuwenden; ja er definirt die Geschwindigkeit geradezu als die bewegende Kraft, durch die ein beweglicher Körper in einer gegebenen Zeit einen gewissen Raum durchläuft. Die Geschwindigkeit nun, da sie mit der Zeit veränderlich sein kann, stellt Barrow durch eine am Ende des die zugehörige Zeit vorstellenden Linienstücks errichtete Senkrechte dar, in der Art also, dass in jedem einen

Zeitmoment darstellenden Punkt die daselbst vorhandene Geschwindigkeit durch ein Perpendikel ausgedrückt ist. Da nun jede Geschwindigkeit vermöge der angenommenen Veränderlichkeit nur einen Augenblick oder einen unendlich kleinen Zeittheil dauert, der durchlaufene Raum aber derselben stets proportional ist, so stellt er diesen Raum durch ein Rechteck dar, dessen Seiten Linien sind, deren eine die Geschwindigkeit, die andere den unendlich kleinen Zeittheil graphisch darstellt.

Nach Aufstellung dieser Fundamentalbegriffe geht nun Barrow über auf die Erzeugung der Curven. Dieselbe kann nach ihm auf doppelte Weise geschehen, entweder durch eine einfache oder durch eine zusammengesetzte Bewegung. Die erstere zerfällt wieder in die progressive, wenn z. B. eine Linie AC (Fig. 8) ihrer ursprünglichen Lage parallel auf einer anderen, geraden oder krummen Linie AB fortbewegt wird, und in die circulare, wenn z. B. durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser die Kugel gebildet wird. Eine zusammengesetzte Bewegung findet dann statt, wenn z. B. eine Gerade AC (Fig. 9), von ihm „generatrix“ genannt, auf einer anderen Geraden, AB , der „directrix“ fortbewegt wird, während zugleich auf ersterer ein Punkt in der Richtung von A nach C sich fortbewegt, der dann, wenn die Generatrix und er selbst eine gleichförmige Geschwindigkeit besitzen, eine die Directrix AB unter einem gewissen Winkel schneidende Gerade, wenn er sich aber mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit bewegt, eine Parabel u. s. w. bildet. Statt aber einen solchen in Bewegung begriffenen Punkt anzunehmen, können wir uns auch vorstellen, dass die bisher als unbeweglich angesehenene Directrix sich ebenfalls fortschiebe und zwar in der Richtung von A nach C oder umgekehrt. Dann wird ihr Durchschnittspunkt mit der gleichfalls fortrückenden Generatrix nach den verschiedenen Geschwindigkeitsverhältnissen verschiedene Curven erzeugen. Die erste Art nun, wo in einer und derselben Linie (der Generatrix) verschiedene Bewegungen, die eine, der Generatrix selbst, die andere, des in ihr auf- und absteigenden Punktes, statthaben, nennt Barrow eine Zusammensetzung der Bewegungen („compositio motuum“), die andere aber, wo verschiedene Linien, wie Directrix und Generatrix jede mit einer einfachen Bewegung begabt sind, nennt er ein Zusammenwirken der Bewegungen („concursus motuum“). Besonders wendet er nun die erste Art, also die Zusammensetzung, und zwar in der aufgestellten Form an,

um Curven entstehen zu lassen und aus den verschiedenen Geschwindigkeiten der zur Erzeugung derselben componirten Bestandtheile, einer Linie und eines Punktes, die Eigenschaften der Curven zu erforschen.

So ergiebt sich sehr einfach, dass, wenn die Bewegung der Generatrix und des in ihr laufenden Punktes mit gleichförmiger Geschwindigkeit geschieht, die so hervorgebrachte Linie eine Gerade ist. Denn hat die Generatrix in der Zeit t_1 das Stück AM_1 (Fig. 9), in der Zeit t_2 das Stück AM_2 der Directrix, der Punkt aber in denselben Zeiten die Stücke bezüglich M_1P_1 , M_2P_2 durchlaufen, so haben wir, da nach der Voraussetzung die Geschwindigkeiten gleichförmig sind, die Proportionen:

$$AM_1 : AM_2 = t_1 : t_2$$

und $M_1P_1 : M_2P_2 = t_1 : t_2,$

woraus folgt: $M_1P_1 : M_2P_2 = AM_1 : AM_2,$

welches die Eigenschaft einer Geraden ist; und man sieht, dass die Tangente ihres Neigungswinkels M_1AP_1 , der d heisse, wenn c_1 die Geschwindigkeit des Punktes, c_2 die der Generatrix ist, ausgedrückt wird durch

$$\text{tang. } d = \frac{c_1}{c_2}.$$

Ebenso leicht lässt sich zeigen, dass, wenn die Geschwindigkeit der Generatrix gleichförmig, die des Punktes gleichförmig beschleunigt ist, eine Parabel entsteht, und dass allgemein in allen von dem ersten verschiedenen Fällen eine Curve entstehen muss, in welcher keine drei benachbarte Punkte in einer Geraden liegen können. Das Fundamentaltheorem, mittelst dessen er das Tangentenproblem zu lösen sucht, ist aber folgendes*): Die Geschwindigkeit des die Curve (welche sie auch sei) beschreibenden Punktes ist an jeder Stelle P (Fig. 10) so gross, dass mittelst derselben, wenn sie gleichförmig beibehalten wird, ein in T befindlicher Punkt die Strecke TQ in derselben Zeit zurücklegt, in der die Generatrix OY die Strecke OM der Directrix durchlaufen hat, dass sie sich also zur Geschwindigkeit der Generatrix verhalte wie $TQ : OM$ oder wie $TQ : QP$. Der Beweis ist folgender: Nehmen wir an, die erzeugende Linie OY befinde sich in einem zwischen O und M gelegenen Punkte M_1 der Directrix, so wird sich der von T aufsteigende Punkt, wenn sich seine Geschwindigkeit zu der der Generatrix verhält wie $TQ : QP$, in einem solchen Punkte T' befinden müssen, dass sich verhält $TT' : OM_1 = TQ : QP$ oder $TT' : Qp_1 =$

*) Lecture IV. der „Geometrical lectures“.

$TQ:QP$. Es wird sich also der auf der TQ aufsteigende Punkt eben so weit unter der Directrix befinden müssen, als der Punkt T_1 . Indem nun der die Curve erzeugende Punkt sich zu dieser Zeit in P_1 befindet und, während sich die Generatrix von M_1 nach M bewegt, von P_1 aus um die Strecke P_1p_1 in die Höhe rückt, der Punkt in TQ aber in derselben Zeit um die grössere Strecke $T'Q$ aufsteigt, so leuchtet ein, dass die Geschwindigkeit des letzteren Punktes grösser ist als die des die Curve beschreibenden Punktes, wenn derselbe sich P_1 befindet. Dasselbe lässt sich zeigen, wenn er sich an irgend einem anderen zwischen O und P gelegenen Punkte befindet. Nehmen wir aber an, die Generatrix sei über M hinaus nach M_2 gekommen, so wird sich aus ähnlichen Gründen wie oben der in TQ aufsteigende Punkt in derselben Höhe über der Directrix befinden, wie T_2 . Er hat also dann von P aus sich nur um ein Stück p_2T_2 erhoben, während der die Curve beschreibende Punkt von P aus um p_2P_2 aufgestiegen ist. Mithin ist die Geschwindigkeit des ersteren kleiner als die des letzteren im Punkte P_2 . Es kann daher nur, wenn die Generatrix in M sich befindet, die Geschwindigkeit des in TQ aufsteigenden Punktes gleich der des die Curve beschreibenden Punktes sein, und zwar verhält sie sich also zur Geschwindigkeit der Generatrix wie $TQ:QP$. Es ist leicht, sich auch auf andere Weise von der Richtigkeit dieses von Barrow aufgestellten Theorems zu überzeugen. Er behauptet also, dass die Seitengeschwindigkeit eines irgend eine Curve durchlaufenden Punktes, und zwar, wenn wir OY als Y -, OM als X -Achse ansehen, dass die Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Y -Achse gleich sei der gleichförmigen Geschwindigkeit, mit der sich in derselben Zeit ein Punkt von T nach Q bewege; Alles unter der Voraussetzung, dass die Seitengeschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punktes in der Richtung der X -Achse (denn dies ist ja Barrow's Geschwindigkeit der Generatrix) gleichförmig sei. Nennen wir nun die Zeit, zu der sich der die Curve beschreibende Punkt in P befindet, t , so ist also seine Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Y -Achse $= \frac{dy}{dt}$, ferner ist TQ , da TP die Tangente ist, bestimmt durch die Gleichung $TQ = x \frac{dy}{dx}$; mithin wird die Geschwindigkeit des die TQ durchlaufenden Punktes, die ja auch gleichförmig sein soll, ausgedrückt durch $\frac{x \cdot \frac{dy}{dx}}{t}$.

Es liegt also Barrow's Theorem in der Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = x \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Soll dies richtig sein, so muss sich aus ihr eine andere richtige Gleichung ableiten lassen. Dividiren wir nun beiderseits mit dy , so erhalten wir

$$\frac{1}{dt} = \frac{x}{t} = \frac{1}{dx},$$

woraus folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t},$$

eine Beziehung, die bekanntlich nichts weiter sagt, als dass die Seitengeschwindigkeit des Curvenpunkts in der Richtung der X-Achse gleichförmig sei. Da nun Barrow, wie erwähnt, auch nur für diesen Fall seinen Satz aufgestellt hat, so erhellt also die Richtigkeit desselben.

Vergleichen wir Barrow's Methode mit der Roberval's, so finden wir ausser dem Bestreben, die Fundamentalbegriffe, namentlich den der Geschwindigkeit, klar hinzustellen, auch noch den bedeutenden Unterschied, dass Barrow durch die Zusammensetzung der Bewegung mittelst zweier Linien, gleichsam von selbst, da dieselben ja bei jeder Curve eine Hauptrolle spielen, auf die Coordinatengeometrie des Descartes hingewiesen wurde, während jener, die Eigenschaften einer Curve, wie sie sich darboten, benutzend, dieselbe verschmähte. Beide aber stimmen darin überein, dass keiner ein für alle Linien gültiges Verfahren, Tangenten zu ziehen u. s. w. angeben konnte.

§. 3.

Ausbildung der Fluxionsmethode durch Newton.

Barrow's ausgezeichnetster Schüler und sein Nachfolger auf dem Lehrstuhle an der Universität zu Cambridge war Isaac Newton (1642—1727)*). Schon früh machte er wichtige Entdeckungen auf dem Gebiete der Optik, sowie auf dem der reinen Mathematik. Unter letzteren, die allein uns hier beschäftigen können, ist jedenfalls die des binomischen Lehrsatzes die wichtigste von seinen Jugend-Arbeiten. Denn indem durch dessen Anwendung

*) „The life of Sir Isaac Newton“ by David Brewster. London 1831.

bei gebrochenen Exponenten die Entwicklung nie abschliesst, entsteht eine unendliche Reihe, und hiermit war ein ganz neues Princip in die Wissenschaft eingeführt, welches insbesondere bei den Englischen Mathematikern der damaligen Zeit die häufigste Anwendung fand, und, bald auch auf den Continent übergegangen, eines der mächtigsten Mittel wurde, durch welche die Resultate, deren sich die höhere Analysis zu erfreuen hat, erzielt wurden.

Eines der wichtigsten und zugleich eines der frühesten Theoreme, zu dem Newton mit Hülfe des binomischen Satzes gelangte, war die Quadratur der Parabolischen Curven. Sein Verfahren findet sich niedergelegt in der Abhandlung: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“*), die 1669 abgefasst und Barrow mitgetheilt ward. Es ist folgendes: Die Linie OM (Fig. 11) sei die X -, eine zu ihr senkrechte die Y -Achse; über ersterer sei eine Curve OPP' gegeben, und es sei das Gesetz bekannt, nach welchem der Flächeninhalt OMP , der z heissen mag, sich mit der Abscisse x ändert, es sei nämlich dieses Gesetz ausgesprochen in der Formel

$$z = \frac{n}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}};$$

gesucht wird die Gleichung der durch dieses Gesetz offenbar bestimmten Curve, also die Ordinate y , ausgedrückt durch x . Es schlägt also Newton den dem jetzt gewöhnlichen Verfahren entgegengesetzten Weg ein, da er die Regeln, wie aus dem Gesetze der Ordinaten das der Flächen abgeleitet wird, noch nicht entdeckt hatte. Wohl aber findet sich schon hier einer

*) Von Newton's Schriften war mir eine Ausgabe der „Principia philosophiae naturalis mathematica“ vom Jahre 1686, also eine der ersten zugänglich. Sie liegt daher den die Princip. phil. nat. betreffenden Citaten zu Grunde. Zu Newton's übrigen Schriften benutzte ich die Horsley'sche Ausgabe, ferner war mir die anonym erschienene Französische Uebersetzung der „Methodus fluxionum“ von Buffon: „La methode des fluxions et des suites infinies par le M. Chevalier Newton; à Paris 1740“, dann „Isaaci Newtoni enumeratio linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusdem tractatus auctore Jacobo Stirling. Parisiis 1797“, endlich die Originalausgabe der Optik mit dem „tractatus de quadratura curvarum“ und der „Enumeratio linearum tertii ordinis“ unter dem anonymen Titel: „Opticks: or, a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures. London 1704“ zugänglich.

der Grundgedanken, die seiner einige Jahre später entwickelten Methode als Basis dienen, wenn auch nicht ausgesprochen, doch angewendet. Um nämlich die vorliegende Aufgabe zu lösen, verfährt Newton folgendermaassen. Er lässt die Abscisse x um ein Increment MM' wachsen, welches er, da es doch hernach wieder verschwinden soll, gleich von vorne herein geradezu mit 0 bezeichnet. Mit dieser Zunahme der Abscisse x ist eine Zunahme $MM'P'P$ der Fläche verbunden, die u heissen mag. Wir haben also die

Beziehung:
$$z + u = \frac{n}{m+n} (x + 0)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Nun lässt sich jedenfalls eine Länge MP'' , die v heissen mag, finden, der Art, dass das Rechteck $MM'NP''$ an Fläche gleich ist der Flächenzunahme $MM'P'P = u$. Der Inhalt dieses Rechtecks $MM'NP''$ ist aber, da die eine Seite $MP'' = v$, die andere $MM' = 0$ ist, auszudrücken durch $v \cdot 0$; es ist also $u = v \cdot 0$; und so entsteht die Gleichung:

$$z + v \cdot 0 = \frac{n}{m+n} (x + 0)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Auf die rechte Seite wird nun der binomische Satz angewandt, so dass sich ergibt:

$$z + v \cdot 0 = \frac{n}{m+n} \cdot \left[x^{\frac{m+n}{n}} + \frac{m+n}{1 \cdot n} \cdot x^{\frac{m}{n}} \cdot 0 + \frac{m+n}{1 \cdot n} \cdot \frac{m}{2 \cdot n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}} \cdot 0^2 + \dots \right].$$

Ziehen wir hiervon die Gleichung: $z = \frac{n}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$ ab, so bleibt:

$$v \cdot 0 = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{2 \cdot n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}} \cdot 0^2 + \dots$$

Heben wir beiderseits mit 0, und bedenken, dass, da MM' verschwindend klein oder $= 0$ ist, die Linie MP' mit $MP = y$ zusammenfällt, und dass alle Glieder mit Ausnahme des ersten auch nach der Division mit 0 den Coefficienten 0 behalten, also selbst $= 0$ sind, so ergibt sich die gesuchte

Curvengleichung:
$$y = x^{\frac{m}{n}}.$$

Wir sehen also hier das Princip der Infinitesimalrechnung, eine Grösse wachsen zu lassen und dann die Zunahme wieder zu annulliren, bereits in Wirkung.

In der im Jahre 1671 verfassten „Methodus fluxionum“ nun hat Newton sein ganzes System niedergelegt, und es enthält dieselbe denjenigen Theil der Mathematik, den man gewöhnlich verstanden wissen will, wenn

man von „Fluxionsrechnung“ schlechtweg spricht. Es ist bereits erwähnt worden, dass Newton ein Schüler Barrow's sei, und in der That, die Methode desselben musste ihm, der, wie wir aus Brewster's Lebensbeschreibung wissen, von früh auf so bedeutendes Talent für Mechanik zeigte, ganz besonders zusagen. Ihr also folgte er, nur mit dem Unterschiede, dass für Barrow die Entwicklung der phoronomischen Theoreme nur Hilfsmittel für die Lösung geometrischer Aufgaben waren, während Newton sie erweiterte und zur Lösung mechanischer Probleme anwandte. In der genannten Abhandlung *) erklärt sich Newton nämlich dahin: er stelle sich die Aufgaben: 1) Wenn der Raum gegeben ist, den ein in stetiger Bewegung begriffener (was er durch das im Deutschen nicht mit einem Worte wiederzugebende „fluere“ ausdrückt) Körper durchlaufen hat, für jeden Ort oder für jede Zeit die Geschwindigkeit zu finden; und umgekehrt: 2) Wenn die Geschwindigkeit und Zeit gegeben ist, den Raum zu finden. Um diese beiden Aufgaben zu lösen, glaubte Newton die Geometrie zu Hülfe nehmen zu müssen (während umgekehrt Barrow, um geometrische Aufgaben zu lösen, die Phoronomie zu Hülfe zog). Denn, sagte er, Raum und Zeit seien Grössen, die mit einander nicht verglichen werden könnten, man müsse sich daher nach einem Dritten umsehen, welches, indem es Verwandtschaft zu beiden habe, sich zur Vermittelung eigne. Dieses Dritte findet Newton in der geraden Linie, ohne sich darüber auszusprechen, wie er die Verwandtschaft derselben „zur Zeit“ finde; vielleicht dass er ebenso wie sein Lehrer Barrow urtheilte. Indem er also die gleichmässig wachsende Zeit als Abscisse, den in dieser Zeit durchlaufenen Raum als Ordinate darstellte, hatte er seine Aufgabe auf die, die Eigenschaften der Curven zu erforschen, mithin auf das Gebiet der Geometrie hinübergespielt. Diese beiden Linien, also die Coordinaten der Curven, nennt Newton, da sie die stetig veränderlichen, ab- oder zunehmenden Grössen, die Zeit und den Raum, repräsentiren: Fluents, und bezeichnet sie durch x , y u. s. w., die Geschwindigkeiten aber, mit denen sie ab- oder zunehmen, nennt er Fluxionen und bezeichnet sie durch $\dot{x}$, $\dot{y}$ u. s. w. Es versteht sich von selbst, dass von diesen wieder die Fluxionen genommen werden können; dies sind dann in Bezug auf die ursprünglichen Fluents x , y , Fluxionen

*) „Methodus fluxionum“, („Geometria analytica“ bei Horsley) LVI—LXI.

zweiter Ordnung, sie werden durch dieselben Buchstaben, jedoch mit zwei Punkten versehen, bezeichnet. Umgekehrt können die Fluenten x , y als Fluxionen zweier anderen Grössen angesehen werden, die durch $\dot{x}$, $\dot{y}$ bezeichnet werden etc. Hierbei versteht es sich jedoch von selbst, dass die Fluxion $\dot{x}$ der Abscisse, da dieselbe die Geschwindigkeit der durch sie repräsentirten Zeit darstellt und die Zeit als gleichmässig wachsend („uniformiter fluens“) gedacht wird, als constant angesehen wird. Daraus folgt von selbst, dass die zweite, dritte und alle folgenden Fluxionen von x gleich Null sind; sodann aber auch, dass die Fluxion von x als Maass, nach welchem die Fluxion von y gemessen wird, mithin als Einheit angenommen werden kann. Da also diese Fluxionen die Geschwindigkeiten sind, mit denen Zeit und Raum, und also auch ihre Repräsentanten, die Coordinaten x und y , zu- oder abnehmen, so erhellt: einmal, dass sie etwas von letzteren, also von x und y , Verschiedenes sind, sodann, dass die Geschwindigkeit der Ordinate (und, wenn man will, auch die der Abscisse x) nur für einen Augenblick dieselbe bleiben wird. Da also die Zeit ihrer Dauer unendlich klein ist, so bezeichnet Newton diese Zeitdauer geradezu durch 0. Indem daher Zeit und Raum und folglich auch die sie repräsentirenden Linien x und y den Augenblick oder die Zeit 0 hindurch, die eine die Geschwindigkeit $\dot{x}$, die andere $\dot{y}$ besitzt, so wird die Zu- und Abnahme dieser Linien x und y , da sie ja der Geschwindigkeit direct proportional ist, ausgedrückt werden müssen durch $\dot{x}0$ und $\dot{y}0$ *). Diese der Geschwindigkeit proportionalen Zu- oder Abnahmen der Fluenten, die mithin als unendlich klein gedacht werden, da die Geschwindigkeit nur für einen Zeitmoment als constant angesehen werden kann, bezeichnet Newton mit dem Ausdrücke Momente**). Sind also nach einer gewissen Zeit

*) Es ist wohl nur ein Versehen, wenn Dr. Gerhardt in seiner „Entdeckung der höheren Analysis. 1855“ pag. 80 sagt, Newton habe die Incremente von x und y durch 0 bezeichnet.

**.) Indem so die Fundamentalbegriffe der Newton'schen Methode erläutert sind, muss noch hinzugefügt werden, dass nur darin eine Unklarheit obwalte, dass Newton sich nirgends bestimmt ausspricht, ob er unter „Fluenten“ den Raum und die Zeit, oder die Repräsentanten derselben, die Coordinaten, also Linien, verstanden wissen wolle. Gewöhnlich nimmt man Letzteres an, und es scheint dies auch, den meisten Stellen in Newton's Werken

die Variablen von der Grösse x und y , so müssen sie im nächsten Zeitmomente die Grösse $x + \dot{x}0$ und $y + \dot{y}0$ erlangt haben. Ferner aber erhellt aus der Definition der „Momente“ und dies ist sehr wichtig, dass überall, wo es nur auf ihr Verhältniss ankommt, das Verhältniss der Geschwindigkeit $\dot{x}$ und $\dot{y}$, denen sie ja proportional sind, gesetzt werden kann, und umgekehrt. Wenn also z. B. die Grösse y des durchlaufenen Raumes für jede Zeit x bestimmt wird durch die Formel:

$$x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3 = 0,$$

so lässt sich hieraus und mit Hülfe des eben Gesagten leicht das Gesetz ableiten, wie sich die Geschwindigkeit $\dot{y}$ für jede Zeit berechnen lässt. Denn nach einem Zeitmomente tritt offenbar die Gleichung ein:

$$(x + \dot{x}0)^3 + 3(x + \dot{x}0)^2(y + \dot{y}0) + (x + \dot{x}0)(y + \dot{y}0)^2 + (y + \dot{y}0)^3 = 0$$

oder ausgerechnet:

$$\left. \begin{aligned} & x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3 \\ & + (3x^2\dot{x} + 6xy\dot{x} + y^2\dot{x} + 3x^2\dot{y} + 2xy\dot{y} + 3y^2\dot{y})0 \\ & + (3x\dot{x}^2 + y\dot{x}^2 + 6x\dot{x}\dot{y} + 2y\dot{x}\dot{y} + x\dot{y}^2 + 3y\dot{y}^2)0^2 \\ & + (\dot{x}^3 + \dot{x}^2\dot{y} + \dot{x}\dot{y}^2 + \dot{y}^3)0^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Wird von dieser Gleichung die ursprüngliche: $x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3 = 0$ abgezogen, so bleiben nur die letzten drei Reihen, die die Coefficienten 0, 0^2 , 0^3 haben, übrig; und wird dann der Factor 0 gestrichen, so fällt in der nunmehrigen ersten Reihe der Coefficient 0 ganz weg, während in der nunmehrigen zweiten und dritten Reihe bezüglich 0 und 0^2 bleibt. Die beiden letzteren annulliren sich also und es bleibt die gesuchte Gleichung:

$$3x^2\dot{x} + 6xy\dot{x} + y^2\dot{x} + 3x^2\dot{y} + 2xy\dot{y} + 3y^2\dot{y} = 0.$$

nach zu urtheilen, seine Meinung zu sein, obschon er dieselbe, wie gesagt, nirgends bestimmt ausspricht. Wenn er sich hingegen: „Tractatus de quadratura curvarum“ propositio I. problema I, Explicatio plenior dahin ausspricht, die Symbole der Fluxionen (also offenbar die Momente) seien von ganz anderer Natur als die Grössen, deren Fluxionen sie seien (was doch nichts Anderes heissen kann, als: sie seien von anderer Natur als die Fluenten), so scheint hiermit ausgesprochen zu sein, dass er unter „Fluenten“ den Raum und die Zeit selbst verstehe. Die Entscheidung hierüber wird besonders durch den Umstand erschwert, dass, wenn in dem Lateinischen Original x und y fluentes genannt werden, natürlich stets ein Zweifel obwaltet, ob dieses Wort als Substantivum oder als Participium zu betrachten sei. In den meisten Fällen jedoch wird diese Zweideutigkeit von keinem Belang sein.

Ohne hier Newton's Verfahren rücksichtlich der Division mit Null zu kritisiren, dessen Unzulänglichkeit ja jetzt hinreichend anerkannt ist, muss die Art und Weise, wie er sich gegen einen anderen Einwand verwahrte, erwähnt werden. Es scheint nämlich, als hätte man ihm entgegnet, die Momente, d. h. also die Incremente im Zustande des Entstehens oder Verschwindens seien Null und könnten also kein angebbares Verhältniss zu einander haben. Hiergegen spricht sich Newton so aus*): Die Incremente haben allerdings sowohl vor als nach dem Verschwinden ein anderes Verhältniss als die Fluxionen, und im Zustande des Entstehens oder Verschwindens, wenn sie also in die Momente übergehen, sind sie in der That $= 0$. Aus letzterem Umstande darf aber nicht gefolgert werden, dass sie in diesem Augenblicke kein bestimmtes Verhältniss haben, ein solches besteht immer noch, und zwar ist es die Grenze des vor oder hinter dem Nullzustande vorhanden gewesenen Verhältnisses, und dieser Grenzwert ist es, der durch das Verhältniss der Fluxionen bezeichnet wird.

Nachdem sich Newton auf diese Weise über die Principien seines Verfahrens ausgesprochen, wendet er sich sogleich zur Auflösung der beiden oben erwähnten Probleme, und zwar zunächst zu dem, aus dem gegebenen Verhältnisse zweier Fluenten, x und y , das Verhältniss ihrer Fluxionen zu finden**), ohne in jedem einzelnen Falle eine besondere Rechnung, wie bei dem obigen Beispiele anstellen zu müssen. Sein Verfahren ist nun folgendes. Es sei z. B. das Abhängigkeitsverhältniss der Fluenten gegeben in der Gleichung:

$$x^3 - 3x^2y + axy^2 - by^3 = 0.$$

Um nun die verlangte Beziehung zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zu finden, schreibt er vor: Man multiplicire alle Glieder, die x enthalten, mit einem Bruche, dessen Zähler der Exponent von x , mit $\dot{x}$ multiplicirt; dessen Nenner x selbst ist, also in unserem Beispiele das erste Glied mit $\frac{3\dot{x}}{x}$, das zweite mit $\frac{2\dot{x}}{x}$ u. s. w., oder, etwas anders ausgedrückt, man multiplicire jedes eine Potenz von x enthaltende Glied mit dem Exponenten dieser Potenz, vermindere den Exponenten um die Einheit und setze $\dot{x}$ als Factor zu.

*) „Princip. philos. natur.“ Liber I. Sectio I.

**) „Methodus fluxionum“. Problema I.

Ebenso werden alle Glieder, die Potenzen von y enthalten, behandelt, so dass alle die Glieder, die sowohl x als y enthalten, zweimal in Betracht gezogen werden müssen. Wird dann alles so Erhaltene mit den ursprünglichen Zeichen zu einem Aggregat verbunden und dies gleich Null gesetzt, so ist in dieser Gleichung die Beziehung zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, die gesucht war, enthalten. Wir erhalten also nach dieser Methode aus unserem Beispiele: $3x^2\dot{x} - 6xy\dot{x} + ay^2\dot{x} - 3x^2\dot{y} + 6xy\dot{y} - 3by^2\dot{y} = 0$.

Fragen wir nach dem Grunde dieser von Newton ohne Beweis aufgestellten Regel, wie er denn fast alle seine Sätze, die rein analytischer Natur sind, ohne Begründung hinstellte, so erhellt, dass das hier angegebene Verfahren nichts anderes ist, als dasjenige, welches man jetzt zum Differenziren impliciter Functionen anwendet. Es ist nämlich, wenn x und y durch die implicite Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden sind, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df(x, y)}{dx}}{\frac{df(x, y)}{dy}}.$$

Wird diese Regel auf unser Beispiel, wo also $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + axy^2 - by^3$ angewandt, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 - 6xy + ay^2}{-3x^2 + 2axy - 3by^2}$$

oder: $3x^2dx - 6xydx + ay^2dx - 3by^2dy + 2axydy - 3x^2dy = 0$, welches die von Newton gefundene Formel ist, wie man sogleich sieht, wenn man dx und dy mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$ vertauscht. Zugleich aber geht aus dem Bisherigen hervor, dass er die gestellte Aufgabe nur in dem Falle zu lösen vermochte, wenn die Fluente durch eine algebraische Relation mit einander verbunden sind. Ja es wird seine Methode, da er direct nur von ganzen rationalen Functionen die Fluxionen zu finden vermochte, schon eine wenigstens weitläufige, wenn Wurzeln oder auch nur Brüche in der gegebenen Fluentengleichung vorkommen. Wie er dann verfuhr, mag an einem Beispiele gezeigt werden. Es sei gegeben die Gleichung:

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2 \cdot \sqrt{ay+x^2} = 0.$$

Nun wird, um Bruch und Wurzel wegzuschaffen: $\frac{by^3}{a+y} = z$; $x^2 \cdot \sqrt{ay+x^2} = v$

gesetzt, so dass die Gleichung lautet:

$$x^3 - ay^2 + z - v = 0.$$

Aus derselben folgt durch Uebergehen zu den Fluxionen:

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{v} = 0. \quad \dagger)$$

Aus der ersten Hülfsleichung $\frac{by^3}{a+y} = z$ folgt aber: $az + yz - by^3 = 0$,

$$\text{folglich: } a\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} - 3by^2\dot{y} = 0$$

$$\text{und daher } \dot{z} = \frac{3by^2\dot{y} - z\dot{y}}{a+y}$$

oder vermöge des Werthes von z :

$$\dot{z} = \frac{3aby^2\dot{y} + 2by^2\dot{y}}{(a+y)^2}.$$

Aus der zweiten Hülfsleichung $x^2 \cdot \sqrt{ay + x^2} = v$ folgt nun:

$$ax^4y + x^6 - v^2 = 0,$$

woraus sich, wenn man zu den Fluxionen übergeht, ergibt:

$$4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x} - 2v\dot{v} = 0,$$

$$\text{folglich: } \dot{v} = \frac{4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x}}{2v}$$

oder vermöge des Werthes von v :

$$\dot{v} = \frac{4axy\dot{x} + ax^2\dot{y} + 6x^3\dot{x}}{2\sqrt{ay + x^2}}.$$

Werden diese Werthe von $\dot{z}$ und $\dot{v}$ in die Gleichung $\dagger)$ eingesetzt, so erhält man die verlangte Fluxionsgleichung:

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \frac{3a-2}{(a+y)^2} \cdot by^2\dot{y} - \frac{4axy\dot{x} + ax^2\dot{y} + 6x^3\dot{x}}{2\sqrt{ay + x^2}} = 0.$$

Eine solche Eliminationsrechnung muss nun für jeden einzelnen Fall angestellt werden. Man sieht, wie beschwerlich dies ist.

Bevor wir zu dem zweiten Probleme übergehen, muss hier noch ein Umstand erwähnt werden. Aus dem Vorigen ist klar, dass nur die Fluxionen von zwei Fluenten, x und y gesucht werden können, insofern man nämlich dem eben beschriebenen rein operativen Verfahren Newton's denjenigen Sinn unterlegen will, den er den Begriffen der Fluenten und Fluxionen selbst zugetheilt hat. Nichtsdestoweniger stellt er sich die Aufgabe, das Verhältniss der Fluxionen x und y auch aus Gleichungen zu finden, die drei Variabele enthalten. Es entsteht nun hier zunächst die Frage:

was soll die dritte Variable, die z heissen mag, bedeuten, da bereits x das Symbol oder der Repräsentant der Zeit, y der des Raumes ist? Man muss gestehen, dass es schwer, ja unmöglich ist, der dritten Veränderlichen einen ähnlichen Sinn unterzulegen. Sehen wir daher zu, wie Newton sich über diesen Gegenstand erklärt. Er spricht sich nun dahin aus: Es sei eine Curve gegeben, deren Abscisse x , deren Ordinate y heisse, die dritte Variable z bedeute die Fläche. Ueber der Abscisse $OM = x$ (Fig. 12) construire man aus den Seiten OM und ON , indem man ON der Flächeneinheit, durch die x und y gemessen werden, gleich macht, ein Rechteck $OMRN$, so enthält dasselbe x Flächeneinheiten. Nun verhält sich, fährt er fort, wahrscheinlich gestützt auf den aus der früheren Abhandlung: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ mitgetheilten Satz, die Fluxion $\dot{z}$ der Fläche z zur Fluxion des Rechtecks $OMRN$, die also durch $\dot{x}$ ausgedrückt wird, wie die letzte Ordinate $MP = y$ zu MN , also, da $MN = 1$ war: $\dot{z} : \dot{x} = y : 1$ woraus folgt: $\dot{z} = \dot{y}x$.

Nun ist bereits oben angegeben worden, dass die Fluxion $\dot{x}$ als Einheit, als Maass angenommen werden kann; thun wir dies, so wird also:

$$\dot{z} = y.$$

Es sei z. B. gegeben die Fluentengleichung:

$$z^2 + 2xyz - x^2 + y^2 = 0$$

und zugleich sei y die Ordinate der Neil'schen Parabel, es sei also $y = x\sqrt{\frac{x}{p}}$. Nach der oben aufgestellten Regel ergibt sich aus der Fluenten-, die Fluxions-Gleichung:

$$2z\dot{z} + 2xy\dot{z} + 2xz\dot{y} + 2y\dot{y} + 2yz\dot{x} - 2x\dot{x} = 0$$

oder, da nach dem soeben entwickelten Satze $\dot{z} = y$ ist und $\dot{x}$ als Einheit genommen wurde: $yz + xy^2 + xz\dot{y} + y\dot{y} - yz - x = 0$.

Man sieht aus dieser ganzen Ableitung, dass auch Newton der dritten Variablen keine phoronomische Bedeutung unterzulegen vermochte, indem er ihr einen rein geometrischen Sinn zuschreibt. Ferner aber ist dieses Problem von dem vorigen, wo nur zwei Fluenten vorhanden waren, gar nicht verschieden; denn es muss ja y als Function von x gegeben sein, und wenn dieser Werth in die gegebene Gleichung eingesetzt wird, bleiben nur zwei Fluenten, y und z . Endlich erhält man darüber, wie eine Gleichung

chung mit mehr als drei Fluenten zu behandeln sei, durchaus keinen Aufschluss *).

Nachdem Newton so die erste Aufgabe, aus einer gegebenen Fluentengleichung die Beziehung der Fluxionen aufzulösen, erledigt hat, wendet er sich **) zum zweiten Problem, nämlich umgekehrt aus der gegebenen Beziehung der Fluxionen die Fluentengleichung wieder herzustellen. Das eine Verfahren, durch welches er dies bewerkstelligte, und welches er selbst als ein nur particuläres bezeichnet, soll wieder sogleich an einem bestimmten Beispiele gezeigt werden. Es sei gegeben die Gleichung:

$$x^3\dot{x} - 2x^2\dot{x} + 3y\dot{x} + 3x\dot{y} - y^2\dot{y} + y^3\dot{y} = 0.$$

Newton schreibt nun folgendes Verfahren vor: Zunächst zerlege man die Gleichung in zwei Theile, von denen der eine alle mit dem Coefficienten $\dot{x}$, der andere alle mit dem Coefficienten $\dot{y}$ behafteten Glieder enthält. In unserem Falle also erhält man die beiden Theile:

*) Dr. Gerhardt spricht in seiner „Entdeckung der höheren Analysis. 1855“ pag. 84, gestützt auf die Aehnlichkeit des von Newton aufgestellten Verfahrens mit dem von de Sluze angegebenen, die Vermuthung aus, Newton habe diese erste Aufgabe zuerst lediglich für Curven gelöst. Einmal aber ist diese Uebereinstimmung nicht so bedeutend, indem de Sluze die Subtangente sucht, mithin den Werth $y\frac{dx}{dy}$ (s. Gerhardt's: „Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz. 1848“ pag. 14 u. 15), so dass die Exponenten von y bei ihm überall um die Einheit höher sind als bei dem Newton'schen Verfahren, welches die Tangente des Tangentenwinkels giebt, ein Unterschied, der für die damalige Zeit keineswegs so unbedeutend ist, und beide stimmen nur darin überein, dass sie den Werth des Differenzialquotienten aus der impliciten Gleichung $f(x, y) = 0$ (s. o.) ableiten. Sodann aber liegt die umgekehrte Vermuthung ebenso nahe, dass nämlich Newton seine Methode ursprünglich nur zur Lösung phoronomischer Aufgaben geschaffen und sich derselben dann auch zur Anwendung auf diejenigen geometrischen Probleme, die damals eine gewisse Berühmtheit erlangt hatten, zu bedienen gesucht habe, wodurch Inconvenienzen, wie die oben erwähnten, leicht entstehen konnten. Zudem hat, wie Buffon in der Préface pag. XV u. XVI zu seiner Uebersetzung der „Methodus fluxionum“ erzählt, de Sluze erst am 17. Januar 1673, mithin als Newton sein Verfahren schon hatte, das seinige dem Secretair der Londoner Akademie, Oldenburg, mitgetheilt.

**) „Methodus fluxionum.“ Probl. II. Solutio particularis.

$$x^3\dot{x} - 2x^2\dot{x} + 3y\dot{x} \text{ und } 3x\dot{y} - y^2\dot{y} + y^3\dot{y}.$$

Der erste Theil wird nun mit $\dot{x}$, der zweite mit $\dot{y}$ dividirt; ferner werden im ersten alle Potenzen von x , im zweiten von y um die Einheit erhöht und jedes Glied mit dem zugehörigen Exponenten dividirt. So erhält man also:

$$\frac{x^4}{3} - \frac{2}{3}x^3 + 3xy \text{ und } 3xy - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}.$$

Diese so erhaltenen Theile werden mit Beibehaltung der Vorzeichen zu einem Aggregate vereinigt, jedoch so, dass, wenn in beiden Theilen ein und dasselbe Glied vorkommt, wie in unserem Falle $3xy$, dasselbe im Aggregate nur einmal geschrieben wird. Das Ganze wird dann $= 0$ gesetzt, und bildet die gesuchte Fluentengleichung. Sie lautet mithin in unserem

$$\text{Falle: } \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 3xy - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} = 0.$$

Man sieht sogleich, dass diesem Verfahren der schon oben erwähnte Satz der Differenzialrechnung ebenfalls zu Grunde liegt, der Satz nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df(x, y)}{dx}}{\frac{df(x, y)}{dy}},$$

$$\text{woraus folgt: } \frac{df(x, y)}{dy} \cdot dy + \frac{df(x, y)}{dx} \cdot dx = 0.$$

Offenbar schliesst nun Newton in ähnlicher Weise, als wenn man aus dieser Gleichung folgern wollte, dass auch:

$$\int \left[\frac{df(x, y)}{dx} \right] \cdot dx + \int \left[\frac{df(x, y)}{dy} \right] \cdot dy = 0,$$

dass also das totale Integral die Summe der partiellen sei. Denn in unserem Beispiele entspricht der Theil $x^3 - 2x^2 + 3y$ dem Ausdrucke $\frac{df(x, y)}{dx}$,

der Theil $3x - y^2 + y^3$ dem $\frac{df(x, y)}{dy}$. Indem nun aber bei der partiellen

Integration des ersten Ausdruckes nach x das in demselben etwa vorkommende y , bei der Integration des zweiten nach y das in demselben enthaltene x als constant angesehen wird, so folgt, dass dieser Schluss nur dann richtig ist, wenn entweder sich die gegebene Fluxions- oder Differenzialgleichung in zwei solche Theile zerlegen lässt, dass der mit $\dot{x}$ behaftete Theil gar kein y , der mit $\dot{y}$ behaftete gar kein x enthält, oder aber wenn

wenigstens in der gegebenen Gleichung das totale Differenzial einer Function von x und y zugleich sich findet. Letzterer Umstand hat in unserem Beispiele statt, wo $3y\dot{x} + 3x\dot{y}$ das totale Differenzial von $3xy$ ist, woraus es sich denn erklärt, warum dieses auf beiden Seiten gefundene Glied nur einmal geschrieben werden darf. In allen anderen Fällen aber wird Newton's Verfahren etwas Unrichtiges liefern. Wollten wir z. B. dasselbe auf die Fluxionsgleichung:

$$x^3\dot{x} - 3x^2y\dot{x} + xy^2\dot{y} - y^3\dot{y} = 0$$

anwenden, so würden wir als Fluentengleichung erhalten:

$$\frac{\dot{x}^4}{4} - x^3y + \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4} = 0,$$

ein Resultat, von dessen Unrichtigkeit man sich sogleich überzeugt, denn nimmt man von dieser Gleichung die Fluxionen, so ergibt sich:

$$\frac{y^3}{3}\dot{x} - x^3\dot{y} + x^3\dot{x} - 3x^2y\dot{x} + xy^2\dot{y} - y^3\dot{y} = 0,$$

was mit der gegebenen Gleichung nicht identisch ist, wie es bei richtigem Verfahren sein müsste; wohingegen nach Newton's Methode aus der Gleichung

$$4x^3\dot{x} + 3x^2\dot{x} - 3y^2\dot{x} - 6xy\dot{y} + 3y^2\dot{y} = 0$$

sich richtig findet: $x^4 + x^3 - 3xy^2 + y^3 = 0$,

weil in ihr die Glieder $3x^2\dot{x} - 3y^2\dot{x} - 6xy\dot{y}$ das totale Differenzial von $x^3 - 3x^2y$ bilden.

Es folgt nun eine Stelle, in der Newton sich so unklar ausspricht, dass es sehr schwierig ist, ihn zu verstehen. Es ist nämlich aus dem Vorigen hinreichend ersichtlich, dass das von ihm angegebene Verfahren, aus einer Fluentengleichung die der Fluxionen, oder umgekehrt, zu finden, nur dann angewendet werden kann, wenn alle Glieder mit Fluxionen gleicher Dimension behaftet sind, wenn also z. B. alle Glieder Coefficienten haben, die nur aus den einfachen Fluxionen $\dot{x}$, $\dot{y}$ bestehen, oder wenn in allen die Fluxionen nur in der zweiten Dimension vorkommen, mithin jedes Glied einen der Ausdrücke $\dot{x}^2$, $\dot{x}\dot{y}$, $\dot{y}^2$ zum Coefficienten hat u. s. w. Newton schliesst nun richtig, dass nur in solchen Fluxionsgleichungen die Beziehung der Fluents hergestellt werden könne, die dieser Bedingung genügen. Denn, sagt er, kommen Glieder mit Fluxionen von höherer Dimension vor, als sich bei den übrigen finden, so sind diese von jenen ganz verschieden, und Gleichungen in dieser Form können nicht angewendet werden; es lasse

sich aber, setzt er hinzu, dieser Uebelstand durch einen Kunstgriff beseitigen. Es sei z. B. die Gleichung gegeben: $x^3\dot{x} - by\dot{x}\dot{y} - cx^2 = 0$. Von ihr sagt nun Newton, sie könne angesehen werden als Ausdruck für das Verhältniss der Momente der Fluenten x und y , denn sowohl diese (die Fluenten) als die Momente seien ja Linien. Offenbar hält hier Newton, im Widerspruche mit dem Früheren, wo er erklärt hat, die Momente seien den Fluxionen bloss proportional und also auszudrücken durch $\dot{x}0$, $\dot{y}0$, hier $\dot{x}$, $\dot{y}$ selbst für die Momente, und confundirt also letztere, die nur eine geometrische Bedeutung haben, mit den Fluxionen, die rein phoronomischer Natur sind. Während er nun in der Meinung steht, dass die Beziehung der Momente durch eine solche Gleichung gegeben sei, kann seiner Ansicht nach die Beziehung der Fluxionen aus derselben nicht erkannt werden, indem x und y Linien vorstellen, also Grössen, die mit den Fluxionen heterogen sind, was wieder im Widerspruche steht mit dem Fundamentalsatze, dass das Verhältniss der Fluxionen dasselbe sei wie das der Momente. Um nun allen Gliedern Fluxionen von gleicher Dimension zu verschaffen, schreibt Newton vor, man solle die ganze Gleichung mit der Fluxion $\dot{z}$ einer dritten Veränderlichen z multipliciren, dieses $\dot{z}$ jedoch als Einheit annehmen, so dass man jedem Gliede das $\dot{z}$ in einer beliebigen Potenz ohne Fehler als Factor beigeben könne. Dies geschieht nun so, dass alle Glieder Fluxionen von gleicher Dimension haben. In unserem Beispiele wäre z. B. das erste Glied $x^3\dot{x}$ mit $\dot{z}$, das zweite Glied $by\dot{x}\dot{y}$, welches schon mit zwei, also der höchsten hier vorkommenden Zahl von Fluxionen behaftet ist, gar nicht, das dritte Glied cx^2 mit $\dot{z}^2$ zu multipliciren, so dass also die Gleichung die Form annimmt: $x^3\dot{x}\dot{z} - by\dot{x}\dot{y} - cx^2\dot{z}^2 = 0$. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass hier jeder Sinn, und ein solcher muss doch einer jeden Operation untergelegt werden, aufhört, insbesondere wenn man sich daran erinnert, dass Newton, der sich hier über die Bedeutung der dritten Fluente z gar nicht ausspricht, vorher die Fläche einer Curve unter derselben verstanden wissen wollte; und ebenso unklar ist die Annahme der dritten Fluxion $\dot{z}$ als Einheit, was naturgemäss bereits von der Fluxion $\dot{x}$ vorausgesetzt worden ist. Das Auffallendste aber ist jedenfalls die eben erwähnte Vermengung der „Fluxionen“ und „Momente“, die sich auf keine Weise rechtfertigen lässt.

Offenbar genügte die oben mitgetheilte Methode Newton's, die er ja

auch nur allein als eine „Solutio particularis“ bezeichnet, aus einer gegebenen Fluxionsgleichung die der Fluenten abzuleiten, ihm selbst nicht, und er löst desshalb dasselbe Problem noch auf eine andere, zwar weniger directe, aber allgemeinere Weise*). Er schreibt hier zunächst vor, man solle jeder Gleichung die Form geben, dass auf einer Seite des Gleichungszeichens der Bruch $\frac{\dot{y}}{x}$, auf der anderen das übrige Aggregat steht; den Zähler $\dot{y}$ dieses Bruches nennt er: „Relata“ (scil. quantitas), weil y das Symbol des Raumes ist, den Nenner $\dot{x}$ „Correlata“. Ferner unterscheidet er drei Classen von Fluxionsgleichungen, nämlich a) solche, die zwei Fluxionen und eine Fluente, b) solche, die zwei Fluenten mit zwei Fluxionen, c) solche, die drei oder mehr Fluxionen enthalten. Das Fundamentalprincip, dessen er sich nun zu der allgemeinen Lösung bedient, ist die Entwicklung in unendliche Reihen.

Unter dem Falle a), der sonst durchaus keine Schwierigkeiten hat, ist nur eine Aufgabe**), die besonderes Interesse darbietet, nämlich die

Lösung der Fluxionsgleichung: $\frac{\dot{y}}{x} = \frac{a}{x}$;

zuerst folgert nun Newton hieraus:

$$y = \frac{a}{0} = \infty,$$

wahrscheinlich im Hinblick auf seine oben erwähnte erste Abhandlung; „De analysi per aequationes etc.“, wo er sich überzeugt hat, dass der geometrische Sinn dieser Aufgabe kein anderer ist, als die gleichseitige Hyperbel zu quadriren. Die Fläche derselben ist aber unendlich, mithin lag sein Schluss sehr nahe. Derselbe scheint ihm jedoch nicht hinlänglich sicher. Denn er löst dieselbe Aufgabe sofort auch auf eine andere Weise. Wird nämlich statt x auf der rechten Seite eine neue Variabele eingeführt, indem man $x = b + z$ setzt, so lässt sich der Bruch $\frac{a}{b+z}$ in eine unendliche Reihe verwandeln, die dann leicht zu behandeln ist. Newton giebt jedoch die Summe der durch Ableitung der Fluenten aus dieser Reihe hervorgegangenen nicht an. Sie ist bekanntlich $a \cdot l(b+z)$, wenn l den natürlichen

*) „Methodus fluxionum“. Probl. II.

**) Ebendasselbst: Casus I.

Logarithmen bedeutet. Erst aus einer späteren Stelle*) geht hervor, dass er den Zusammenhang der erhaltenen Reihe mit den Logarithmen wohl kannte.

Der Fall b, **) umfasst die Mehrzahl der hierher gehörigen Aufgaben. Ihre Auflösung geschieht nach Newton's Darstellung folgendermaassen. Es sei z. B. gegeben die Gleichung:

$$2\dot{x} + 3x\dot{x} - 2y\dot{x} + x^2\dot{x} + x^2y\dot{x} - \dot{y} = 0.$$

Zunächst wird dieselbe auf die Form gebracht:

$$\frac{\dot{y}}{x} = 2 + 3x - 2y + x^2 + xy^2$$

und Newton sucht nun die gesuchte Fluente y in Form einer unendlichen Reihe darzustellen. Zu dem Zwecke schreibt er vor, alle Glieder der rechten Seite, die y nicht enthalten, in horizontaler, die mit y behafteten aber in verticaler Richtung hinschreiben, so dass also die rechte Seite die Form annimmt:

$$\begin{array}{r|l} 2 + 3x + x^2 & \\ -2y & \\ +x^2y & \end{array}$$

Nun werde das erste Glied 2 der horizontalen Reihe mit x multiplicirt, so dass $2x$ entsteht. Dies ist das erste Glied der den gesuchten Werth von y enthaltenden unendlichen Reihe. Darauf werde in den vertikalen Gliedern $-2y + x^2y$ dieser bisher gefundene Werth $2x$ von y für y eingesetzt und die entstandenen Glieder den mit gleichen Exponenten versehenen der horizontalen Reihe untergeschrieben, so dass also folgendes Schema entsteht:

$$\begin{array}{r|ll} 2 + 3x + x^2 & & \\ -2y & -4x & \dots\dots \\ +x^2y & \dots\dots\dots & +2x^3 \end{array}$$

bisheriger Werth von also: $y: y = 2x$.

Jetzt werden die Glieder der so entstandenen drei Horizontalreihen (deren erste $2 + 3x + x^2$, die zweite $-4x$, die dritte $+2x^3$ ist), welche x enthalten, addirt; es sollen also $+3x$ und $-4x$ addirt werden, woraus sich ergibt $-x$. Wird dies mit x multiplicirt, so dass $-x^2$ entsteht und

*) „Methodus fluxionum“. Probl. IX. L — LXII.

**) „Methodus fluxionum“. Probl. II. Casus II.

dies mit seinem Exponenten 2 dividirt, so bildet der so erhaltene Werth $-\frac{x^2}{2}$ das zweite Glied der y darstellenden Reihe, so dass wir also haben: $y = x - \frac{x^2}{2}$. Dieser Werth $-\frac{x^2}{2}$ wird nun wieder in der Vertikalreihe $-2y + x^2y$ für y eingesetzt, und die erhaltenen Werthe der zweiten und dritten Horizontalreihe angefügt, so dass das Schema entsteht:

$$\begin{array}{r|l} & 2 + 3x + x^2 \\ \hline -2y & \dots - 4x + x^2 \dots\dots \\ +x^2y & \dots\dots + 3x + 2x^3 - \frac{x^4}{2} \\ \hline \end{array}$$

bisheriger Werth von y : $y = 2x - \frac{x^2}{2}$.

Jetzt werden die Glieder der Horizontalreihen, die x^2 enthalten, addirt, wodurch $x^2 + x^2 = 2x^2$ entsteht, dies wird mit x multiplicirt, so dass $2x^3$ herauskommt und dann durch den Exponenten 3 dividirt; der so erhaltene Werth $\frac{2}{3}x^3$ bildet das dritte Glied der Reihe für y , derselbe wird wieder in die Vertikalreihen eingesetzt u. s. w., so dass das Schema hervorgeht:

$$\begin{array}{r|l} & 2 + 3x + x^2 \\ \hline -2y & \dots - 4x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 \dots\dots \\ +x^2y & \dots\dots\dots + 2x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}x^7 \dots\dots \\ \hline \end{array}$$

und es wird: $y = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \dots\dots$

Wir fragen wieder nach dem Beweise dieses von Newton ohne alle weitere Begründung angegebenen rein mechanischen Verfahrens, bei dessen Anblick man sich unwillkürlich an Fourier's Methode der Division erinnert, bei der ebenfalls das Resultat durch Fortsetzung der Rechnung immer corrigirt und der Wahrheit näher gebracht wird. Man sieht nun bald, dass der hier beschriebene Mechanismus auf der s. g. Methode der unbestimmten Coefficienten beruhe. Da nämlich y in einer nach Potenzen von x fortschreitenden unendlichen Reihe ausgedrückt werden soll, muss dieselbe die Gestalt haben: $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$, †) worin die Coefficienten A_0, A_1 u. s. w. zu bestimmen sind. Aus dieser Gleichung folgt nun sogleich:

$$\frac{\dot{y}}{x} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \dots \quad \dagger\dagger)$$

In der gegebenen Aufgabe aber ist bereits der Werth von $\frac{\dot{y}}{x}$ gegeben; in unserem Falle war z. B.:

$$\frac{\dot{y}}{x} = 2 + 3x - 2y + x^2y. \quad \dagger\dagger\dagger)$$

Wird nun der angenommene Werth von y aus $\dagger)$ in der letzten Gleichung für y eingesetzt, so erhält man:

$$\frac{\dot{y}}{x} = 2(1 - A_0) + (3 - 2A_1)x + (1 + A_0 - 2A_2)x^2 + (A_1 - 2A_3)x^3 + \dots \quad *)$$

Werden die Coefficienten der Potenzen von x in dieser Reihe mit den Coefficienten der gleichen Potenzen in der Gleichung $\dagger\dagger)$ verglichen, so ergeben sich hieraus Gleichungen, durch die sich die unbekannten Coefficienten A_0, A_1, A_2 u. s. w. bestimmen. Wir erhalten also in unserem Beispiele:

$$A_1 = 2(1 - A_0); \quad 2A_2 = 3 - 2A_1; \quad 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2; \quad 4A_4 = A_1 - 2A_3; \\ 5A_5 = A_2 - 2A_4; \dots\dots$$

Es leuchtet ein, dass bei diesem Verfahren ein oder mehrere Coefficienten unbestimmt bleiben können, wie z. B. hier A_0 . Es kann mithin sein Werth, wenn keine weitere Bestimmung über ihn getroffen ist, indem er etwa einer vorgeschriebenen Bedingung genügen soll, willkürlich angenommen werden. Nehmen wir nun $A_0 = 0$, so bestimmen sich alle übrigen Coefficienten und man erhält:

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 2; \quad A_2 = -\frac{1}{2}; \quad A_3 = \frac{2}{3}; \quad A_4 = \frac{1}{6}; \quad A_5 = -\frac{1}{6}; \dots\dots$$

kurz, wir erhalten dieselben Coefficienten von x wieder, wie sie Newton durch seinen Mechanismus findet, und eine genauere Betrachtung desselben zeigt, dass er in der That die Coefficienten nach demselben Bildungsgesetze entstehen lässt, wie es sich nach der Methode der unbestimmten Coefficienten herausgestellt hat. Da nun aber einer oder mehrere derselben willkürlich bleiben können, so folgt, dass dieselbe Aufgabe auf verschiedene Weise gelöst werden kann. Nehmen wir z. B. $A_0 = 1$, so erhalten wir:

$$A_0 = 1; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{2}{3}; \quad A_3 = -\frac{1}{3}; \quad A_4 = -\frac{1}{6}; \quad A_5 = \frac{7}{30}; \dots\dots$$

und für y also die Reihe:

$$y = 1 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \dots\dots$$

Dieser Umstand, dass es verschiedene Lösungen derselben Aufgabe gebe, entging auch Newton nicht und er macht ausdrücklich auf denselben aufmerksam. Kommt auf der rechten Seite der gegebenen Fluxionsgleichung

y im Nenner vor, wie z. B. in der Gleichung:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3x - \frac{2}{y} + x^2 + \frac{x}{y},$$

so substituirt er für y ein Binom, z. B. $1 + z$, entwickelt den Bruch $\frac{1}{1+z}$ in eine Reihe und wendet dann dasselbe Verfahren an. Die Mangelhaftigkeit desselben, die es mit der Methode der unbestimmten Coefficienten theilt, dass nämlich das allgemeine Bildungsgesetz der Coefficienten nicht ersichtlich sei, sowie besonders, dass man über die Con- oder Divergenz der Reihen im Ungewissen bleibe, wird Niemand Newton zum Vorwurfe machen wollen, der weiss, dass erst ein Jahrhundert später der Begriff der Begriff der Con- und Divergenz zur Klarheit gelangte und dass der Streit über die Nothwendigkeit der Untersuchung derselben sich fast bis in die Gegenwart gezogen hat.

Hierauf geht Newton zu dem unter c) erwähnten Falle*), nämlich zur Lösung einer Fluxionsgleichung über, in der drei oder mehrere Fluxionen enthalten sind. Man muss jedoch zugeben, dass er in der Behandlung dieses allerdings schwierigen Problems, welches kein anderes ist, als das der partiellen Differenzialgleichungen, nicht glücklich war. Er hilft sich nämlich damit, dass er eine zweite Gleichung zwischen zweien der Variablen nach Willkür annimmt und mit ihrer Hülfe die Aufgabe löst. Es sei z. B. das Beispiel gegeben: $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$; so nimmt er die Gleichung:

$$y = \sqrt{x} \text{ oder } y^2 = x$$

zu Hülfe, aus der folgt: $\dot{x} = 2y\dot{y}$.

Wird dieser Werth in die gegebene Gleichung eingesetzt, so kommt heraus:

$$4y\dot{y} - \dot{z} + y^2\dot{y} = 0.$$

Diese Gleichung liefert als Beziehung zwischen den Fluenteu:

$$2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = z$$

oder, da $y^2 = x$ war:

$$2x + \frac{1}{3}xy = z.$$

Dass dieses Resultat ein unrichtiges ist, davon überzeugt man sich leicht durch die Probe. Es lässt sich übrigens gerade dieses Beispiel leicht lösen. Schreibt man nämlich die gegebene Fluxionsgleichung in der Form:

*) „Methodus fluxionum“. Probl. II. Casus III.

$$x \cdot \frac{\dot{y}}{x} = \frac{\dot{z}}{x} - 2$$

oder, mit Anwendung der jetzt üblichen Bezeichnungsweise der Differenzialrechnung: $x \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2,$

so sieht man leicht, dass wenn A und B Constante sind, diese Gleichung erfüllt wird durch die Functionen:

$$y = \frac{2m+1}{2m-1} \cdot A \cdot \sqrt{x^{2m-1}} + B; \quad z = A \sqrt{x^{2m+1}} + 2x + B.$$

Es genügen mithin auch die Functionen:

$$y = \frac{2m+1}{2m-1} \cdot A_1 \cdot \sqrt{x^{2m-1}} + \frac{2m+1}{2m-1} \cdot A_2 \sqrt{x^{2m-1}} + B$$

$$z = A_1 \sqrt{x^{2m+1}} + A_2 \sqrt{x^{2m+1}} + 2x + B$$

oder, indem wir für A_1, A_2 u. s. w. irgend eine Function von $m, \varphi(m)$, multiplicirt mit dm setzen, und alle Glieder summiren, d. h. nach m integriren:

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m+1}{2m-1} \cdot \varphi(m) \sqrt{x^{2m-1}} \cdot dm + B,$$

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(m) \sqrt{x^{2m+1}} \cdot dm + 2x + B.$$

Ebenso würde man, um die Gleichung

$$a\dot{y}\dot{z} - b\dot{x}\dot{z} + c\dot{x}\dot{y} = 0$$

zu lösen, nach Newton's Vorschrift z. B. $y = x^3$, mithin $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$ setzen müssen, wodurch man erhielte:

$$3ax^2\dot{x}\dot{z} - b\dot{x}\dot{z} + 3cx^2\dot{x}^2 = 0$$

oder:

$$3ax^2 - b + 3cx^2 \frac{\dot{x}}{z} = 0,$$

folglich:

$$\frac{\dot{z}}{x} = \frac{3cx^2}{b - 3ax^2}.$$

Dies gäbe, in eine Reihe umgewandelt:

$$\frac{\dot{z}}{x} = \frac{3c}{b} x^2 + \frac{9ac}{b^2} x^4 + \frac{27a^2c}{b^3} x^6 + \frac{81a^4c}{b^4} x^8 + \dots$$

folglich:

$$z = \frac{c}{b} x^3 \left(1 + \frac{9}{5} \cdot \frac{a}{b} x^2 + \frac{27}{7} \cdot \frac{a^2}{b^2} x^4 + \dots \right)$$

ein Werth, der der gegebenen Eluxionsgleichung nicht genügt. Schreiben wir dieselbe aber in der Form:

$$a \cdot \frac{\dot{z}}{x} = b \cdot \frac{\dot{y}}{x} - c,$$

so sieht man leicht, dass sie erfüllt ist durch den Werth:

$$z = \sqrt{1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{b}y} + C$$

wenn C eine Constante ist, sie ist aber auch erfüllt durch die Gleichung:

$$z = \beta \sqrt{\alpha + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{b}y} + C,$$

wenn α und β ebenfalls arbiträre Constante bezeichnen, woraus sich wieder die allgemeinste Wurzel findet, indem man $\beta = \psi(\alpha) \cdot d\alpha$ setzt, wo $\psi(\alpha)$ irgend eine Function von α bedeutet, und nach α integrirt, so dass die Gleichung

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \psi(\alpha) \sqrt{\alpha + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{b}y} + C$$

die Auflösung enthält, die freilich nur in einzelnen Fällen, wie die hier behandelte Aufgabe, gefunden werden kann.

Es ist schon aus dem bisher Gesagten ersichtlich, dass Newton's Methode, auf die Lösung einiger phoronomischer Aufgaben berechnet, in der That überall, wo sie den Boden der reinen Bewegungslehre verlässt, und den der reinen Analysis betritt, sich in Unklarheiten verwickelt. Es dürfte sich dies aber nirgends in die Augen fallender zeigen, als darin, dass Newton ausser Stande war, einige der Fundamentalsätze der Differentialrechnung mit hinreichender Deutlichkeit zu beweisen. Dahin rechnen wir insbesondere den Beweis*) für die Fluxion eines Productes und einer Potenz. Es heisst nämlich an genannter Stelle: Man denke sich ein Rechteck, dessen Seiten A und B seien, dessen Inhalt also AB ist. Die Momente dieser Seiten mögen bezüglich a und b heissen. Werden nun die Seiten A und B um die Hälften (!) der Momente vermindert und vermehrt, so entstehen zwei Rechtecke, deren Fläche bezüglich:

$$(A - \frac{1}{2}a)(B - \frac{1}{2}b) = AB - \frac{1}{2}Ab - \frac{1}{2}Ba + \frac{1}{4}ab$$

und

$$(A + \frac{1}{2}a)(B + \frac{1}{2}b) = AB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}Ba + \frac{1}{4}ab$$

ist. Wird nun die erste dieser Gleichungen von der zweiten abgezogen, wodurch wir offenbar die Flächendifferenz des Rechtecks aus den Sei-

*) „Princip. phil. natur. Editio prima pag. 251.

ten $A + \frac{1}{2}a$, $B + \frac{1}{2}b$ und des anderen aus den Seiten $A - \frac{1}{2}a$, $B - \frac{1}{2}b$ und des anderen aus den Seiten $A - \frac{1}{2}a$, $B - \frac{1}{2}b$ erhalten, also die Flächenzunahme, die letzteres erleidet, wenn seine Seiten um ein ganzes Moment wachsen, oder mit anderen Worten das Moment der Fläche, so erhält man: $Ab + Ba$. Wie hier mit Hülfe eines Parallelogramms die Fluxion eines Products aus zwei Veränderlichen gefunden wurde, so lässt sich auch mit Hülfe eines Parallelepipedons, dessen dritte Seite C ist, deren Moment c heissen mag, das Moment eines Productes ABC aus drei Fluenten auffinden. Man erhält dann auf demselben Wege wie bisher durch Ab- und Zunehmenlassen um ein halbes Increment als Moment: $ABc + ACb + BCa$. Nehmen wir nun n Veränderliche und alle einander gleich, setzen wir also $A = B = C = \dots$, so erhellt, dass auch ihre Momente $a = b = c = \dots$ gleich sein müssen, und dass wir auf diese Weise das Moment von A^n erhalten. Dies wird also sein: $nA^{n-1} \cdot a$. Es ist klar, dass der Nerv dieses Beweises, das Ab- und Zunehmenlassen um halbe Incremente, eine Operation ist, mit der ein Sinn nicht verbunden werden kann. Uebrigens erhält man, wenn man die Fluenten, z. B. A und B erst z. B. um ein Drittel eines Increments ab-, dann aber um zwei Drittel zunehmen lässt, was ja auch eine Veränderung um ein ganzes Moment ist, als Moment des Productes AB nicht $Ab + Ba$, sondern $Ab + Ba + \frac{1}{3}ab$, und obiges Resultat $Ab + Ba$ erscheint eben nur bei einem Vor- und Rückwärtsschreiten um ein halbes Moment. Man möchte daher fast die Vermuthung aussprechen, Newton habe den inzwischen von Leibniz mit Hülfe seiner Differenzialrechnung gefundenen Satz: $dxy = ydx + xdy$ auch nach seiner Methode wohl oder übel zu beweisen gesucht, obschon derselbe, wie sich aus dem Vorigen bereits ergeben haben wird, für seine Theorie nicht so wichtig ist, als für die Leibnizische. Dass aber auf das Unzulängliche seiner Beweismethode erst achtundvierzig Jahre später von einem anonymen Autor*) aufmerksam gemacht wurde, ist sehr auffallend und scheint Biot's von Gubrauer**) mitgetheilte Meinung, dass Leibniz, der doch sonst ge-

*) Die Schrift desselben führt den Titel: „The analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician. By the author of the minute philosopher“. London, 1734. (S. §. 13).

**) „Gottfried Wilhelm Freiherr v. Leibniz. Eine Biographie von G. E. Gubrauer“. Breslau, 1846. Theil 1. pag. 297.

wiss diesen Fehlen hervorgehoben hätte, die Princ. phil. nat. „nicht gelesen oder höchstens nur darin geblättert habe“ zu bestätigen. Es versteht sich von selbst, dass der aus dem Verfahren bei einem Producte von zwei Fluenten abgeleitete Beweis für die Bestimmung des Moments einer Potenz ebenso unhaltbar ist. Derselbe entbehrt übrigens auch noch überdies der geometrischen, von Rechteck und Parallelepipedon hergenommenen Anschaulichkeit, wenn der Exponent grösser als 3 ist. Ueberhaupt scheint bei Newton über dem Beweise, dass die Fluxion von x^n gleich $nx^{n-1}\dot{x}$ sei, ein böses Verhängniss gewaltet zu haben. Denn indem er in einer 1704 verfassten Abhandlung*) den genannten Satz, vielleicht weil ihm die in den Princ. phil. nat. gegebene Begründung nicht genügte, mit Hülfe des Binomialtheorems zu beweisen suchte, lässt er die Fluente x um 0 zunehmen und entwickelt $(x+0)^n$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe, so dass man erhält:

$$(x+0)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1} \cdot 0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} \cdot 0^2 + \dots$$

Indem er nun das Glied $\frac{n}{1}x^{n-1} \cdot 0$ für die erste, das Glied $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} \cdot 0^2$ für die zweite Fluxion u. s. w. erklärt, begeht er einen Fehler, da in dem Ausdrücke für die erste, zweite u. s. w. Fluxion von x^n die Nenner 1. 2, 1. 2. 3, u. s. w. nicht vorhanden sind, denn es ist ja bekanntlich $\frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ und nicht $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}$, $\frac{d^3x^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, nicht $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}$ u. s. w. Auch wurde Newton, wie schon Horsley in einer Anmerkung zu dieser Stelle erzählt, von Anderen (nämlich von Nicolaus Bernoulli) auf diesen Fehler aufmerksam gemacht, wesshalb er später durch die Einschlebung des Wörtchens „ut“ in den Lateinischen Text sich dahin verbesserte, dass er sagte, die genannten Glieder verhielten sich wie die Fluxionen zweiter, dritter u. s. w. Ordnung**). Es scheint

*) „Tractatus de quadratura curvarum“. Scholium. Diese Abhandlung erschien zugleich mit seiner Optik und der „Enumeratio linearum tertii ordinis“. (S. o.)

***) Vergl. Gerhardt: „Die Entdeckung der höheren Analysis“. 1855. pag. 89.

aber nicht bemerkt worden zu sein, dass auch dann noch ein Fehler, wenigstens eine Unklarheit in der Rechnung übrig geblieben ist. Offenbar nämlich will er an dieser Stelle das x um ein Moment zunehmen lassen. Dies wird aber nicht durch 0, sondern wenn $\dot{x}$ die Fluxion bezeichnet, durch $\dot{x}0$ ausgedrückt; es ist also überall $\dot{x}0$ für 0 zu setzen, und die erste, zweite, dritte Fluxion von x^n sind bezüglich $nx^{n-1}\dot{x}$, $n(n-1)x^{n-2}\dot{x}$, $n(n-1)(n-2)x^{n-3}\dot{x}$. Den letzten der eben erwähnten beiden Fehler begeht übrigens Newton auch schon an einer Stelle der Principia*), wo er sich, wenn auch nur an einem Beispiele, über die geometrische Bedeutung der successiven Glieder einer Binomialreihe ausspricht: Es sei nämlich (Fig. 13) ein Kreis mit dem Halbmesser r gegeben, dessen Centrum O als Coordinatenanfangspunkt betrachtet werde. Dann ist die der Abscisse $OM = x$ zugehörige Ordinate $MP = y = \sqrt{r^2 - x^2}$, mithin, wenn $MM' = 0$ ein Moment (nach Newton's Ausdruck) der Abscisse ist, die der Abscisse OM' , zugehörige Ordinate $M'P' = \sqrt{r^2 - (x + 0)^2}$ oder:

$$M'P' = \sqrt{r^2 - x^2 - 2x0 - 0^2}$$

oder, da $r^2 - x^2 = y^2$ ist:

$$M'P' = \sqrt{y^2 - 2x0 - 0^2}.$$

Wird nun der binomische Satz angewandt, so erhält man:

$$M'P' = y - \frac{x0}{y} - \frac{0^2}{2y} - \frac{x^2 0^2}{2y^3} - \frac{x0^3}{2y^3} - \frac{x^3 0^3}{2y^5} - \dots$$

Da nun $x^2 = r^2 - y^2$, so können wir diesen Werth für x^2 einsetzen, dann ergibt sich:

$$M'P' = y - \frac{x0}{y} - \frac{0^2}{2y} - \frac{r^2 0^2}{2y^3} + \frac{0^2}{2y} - \frac{x0^3}{2y^3} - \frac{xr^2 0^3}{2y^5} - \frac{x0^3}{2y^3} - \dots$$

$$\text{oder: } M'P' = y - \frac{x0}{y} - \frac{r^2 0^2}{2y^2} - \frac{xr^2 0^3}{2y^5} - \dots$$

Auch hier müsste offenbar überall $\dot{x}0$ an der Stelle von 0 stehen, da das Moment durch $\dot{x}0$ bezeichnet wird. Was nun die geometrische Bedeutung der einzelnen Glieder betrifft, so legt Newton, da das erste Glied y die Ordinate MP darstellt, auch den übrigen, ohne sich jedoch weiter auf eine Begründung einzulassen, einen geometrischen Sinn unter und spricht sich dahin aus, das erste nach y folgende Glied bedeute die Linie RQ , durch

*) „Princ. phil. nat.“ Lib. II. Sect. II. Propos. X. Probl. III.

die die Tangente in P bestimmt werde, das zweite bedeute $P'R$, die zwischen Curve und Tangente gelegen die Krümmung bestimme, das dritte bedeute die Variation der Krümmung, das vierte die Variation der Variation u. s. w. — Wenn sich nun schon Newton an den erwähnten drei Orten (der erste war die oben erwähnte Stelle, wo er einer Fluxionsgleichung Fluxionen von derselben Dimension zu verschaffen sucht) eine Unklarheit in Bezug auf den Begriff der „Momente“ offenbar zu Schulden kommen lässt, so ist doch die Art und Weise, wie sie sich von den Fluxionen unterscheiden in der „Methodus fluxionum“ zu klar und deutlich angegeben, als dass man diesen drei Stellen eine Bedeutung beilegen könnte. Man wird sie vielmehr nur für Versehen zu halten haben, wie sie einem Jeden begegnen. Daher kann es nicht gebilligt werden, wenn sich Montucla dahin ausspricht, Newton habe unter „Fluxion“ zweierlei verstanden, einmal die Geschwindigkeit*), sodann wie die Incremente (accroissemens)**) und habe für sie bald die Bezeichnung $\dot{x}$, bald $x0$ (wahrschein-

*) Montucla: Histoire des mathématiques. Tome II. pag. 373.

**) Ebendasselbst pag. 372 sagt Montucla: „M. Newton conçoit encore ces fluxions d'une autre manière, savoir comme les dernières raisons des accroissemens simultanés de deux grandeurs qui dependent l'une de l'autre.... Pour trouver donc cette raison supposons l'abscisse égale à x et l'ordonnée représentée par une fonction de x , comme x^n . Que l'accroissement de x soit désigné par $\dot{x}$, tandisque x deviendra $x + \dot{x}$ deviendra $(x + \dot{x})^n$ ou $x^n + nx^{n-1} \cdot \dot{x} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \dot{x}^2 + \dots$. Les accroissemens sont donc comme $\dot{x}$ et nx^{n-1} . $\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \dot{x} + \dots$ ou comme 1 et $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \dot{x}$ etc. Donc à l'instant où $\dot{x}$ deviendra zéro, cette raison sera celle de 1 à nx^{n-1} , ou enfin celle de $\dot{x}$ à $nx^{n-1} \dot{x}$, qui est la même. Ainsi la fluxion ou l'accroissement évanescent de x^2 sera $2x\dot{x}$, celui de x^3 , $3x^2\dot{x}$ etc. comme il est aisé de le conclure du raisonnement ci-dessus. On voit encore par là d'une autre manière que ci dessus ce que sont les fluxions de fluxions, ou les accroissemens d'accroissemens...“ Während also Montucla Anfangs richtig sagt, die fluxions sont comme les dernières raisons des accroissemens, behandelt er sie zuletzt („les fluxions de fluxions ou les accroissemens d'accroissemens“) als identische Dinge. Ebenso unbegreiflich ist es, was er mit den Worten „Donc à l'instant où $\dot{x}$ sera zéro“ meint, da ja die Fluxion $\dot{x}$ nie $= 0$ gesetzt wird. Vielmehr nimmt sie Newton stets zur Einheit, zum Maasse.

lich ist $\dot{x}0$ zu verstehen) angewendet. Es ist wahr, dass Newton bei der Anwendung seiner Fluxionsmethode auf Geometrie in der „Methodus fluxionum“ öfter z. B. die Abscisse x um $\dot{x}$ statt um $\dot{x}0$ wachsen lässt, etc.; allein hier, wo er sich kurz vorher über „Fluxionen“ und „Momente“ so deutlich ausgesprochen hat, darf man es gewiss nicht anders erklären, als dadurch, dass er dies that, um nicht immerwährend dasselbe sagen zu müssen, denn in jedem Beispiele müssen doch zuletzt die Fluxionen an die Stelle der Momente gesetzt werden. Diesen stereotypen Gedankengang zu vermeiden setzt Newton gleich die Fluxionen statt der Momente, überzeugt, dass Jeder, der das Vorausgegangene gelesen, sich leicht darein finden werde. Auffallender sind allerdings die oben angeführten drei Stellen, bei denen er dies wohl nicht so unmittelbar voraussetzen konnte.

Gehen wir nun zu der Anwendung über, die Newton von seiner Methode zur Lösung geometrischer Aufgaben machte. Die einfachste Anwendung liess unstreitig das Tangentenproblem*) zu. Denn lassen wir die Coordinaten x und y einer Curve um Incremente zunehmen, so erhellt, dass die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels erhalten wird, indem wir in dem aus diesen Incrementen gebildeten Quotienten dieselben verschwinden, d. h. in Momente übergehen lassen, oder da das Verhältniss der Momente dasselbe ist, wie das der Fluxionen, indem wir aus der gegebenen Curvengleichung das Verhältniss der Fluxionen suchen. Aus dem Vorigen ist nun klar, dass Newton dies nur bei algebraischen Curven zu finden im Stande war, da seine Methode!, die Fluxionen zu finden, sich nur auf algebraische Functionen beschränkte. Er stellte daher noch eine Reihe anderer Methoden auf, z. B. mit Hülfe der Fläche der Curve, oder mit Hülfe eines gegebenen Kreises u. s. w. die Aufgabe zu lösen. Allein diese sind sämmtlich in einzelnen Fällen anwendbar und tragen das Gepräge des Künstlichen an sich. Auch in Beziehung auf das Auffinden der Maxima und Minima, eine Aufgabe, die er merkwürdiger Weise noch vor der Tangentenmethode abhandelte**), war er wenigstens nicht glücklicher als Fermat***), indem er wohl durch Uebergehen von der gegebenen

*) „Methodus fluxionum“. Probl. IV.

**) Ebendaselbst. Probl. III.

***)) Fermat's Methode findet sich dargestellt in Gerhardt's „Entdeckung

Function zu ihrer Fluxion und durch Setzen derselben gleich Null, den Werth ermittelte, für den ein Zeichenwechsel stattfindet, aber nicht zu bestimmen im Stande war, ob dies ein Maximum oder Minimum sei. Bemerkenswerth ist, dass Newton auch die Flexionspunkte der Curven, wo dieselben also aus Convexität in Concavität oder umgekehrt übergehen, zu bestimmen suchte, eine Untersuchung, die er jedoch nur für die Conchoide des Nikodemus anstellte*). Diese Curve entsteht bekanntlich, indem eine gerade Linie QP (Fig. 14) von der Länge a mit dem einen Ende Q auf einer anderen Geraden OS hingeleitet und zwar so, dass sie stets nach einem gegebenen Punkte R , dem s. g. Pole, der unter oder über OS gelegen sein kann, gerichtet ist. Die Linie, die dann der andere Endpunkt P der gleitenden Geraden QP beschreibt, heisst die Conchoide. Liegt der Pol R (Fig. 14^a) unter OS , so hat dieselbe keinen Rückkehrpunkt, liegt er aber über OS (Fig. 14^b), so kann die Curve eine Schleife bilden. Wir betrachten hier den ersten Fall. Nehmen wir die OS zur Abscissenachse, und eine vom Pole R auf sie gerichtete Gerade als Ordinatenachse, so haben wir, wenn wir OR durch b , QP durch a , die Abscisse OM durch x , die Ordinate MP durch y bezeichnen, um die Gleichung unserer Curve zu finden, die Proportion: $b : x - MQ = y : MQ$

oder: $b + y : y = x : MQ,$

folglich: $MQ = \frac{xy}{b + y}.$

Nun ist aber auch: $MQ = \sqrt{QP^2 - MP^2},$

d. h. $MQ = \sqrt{a^2 - y^2}.$

Wir haben also die gesuchte Gleichung:

$$\frac{xy}{b + y} = \sqrt{a^2 - y^2}$$

oder: $(b + y)\sqrt{a^2 - y^2} - xy = 0.$

Nun bestimmt Newton die Subtangente MS aus der Proportion:

$$y : MS = \dot{y} : \dot{x},$$

wobei natürlich durch Substitution die Wurzel $\sqrt{a^2 - y^2}$ in der gegebenen

der Differenzialrechnung durch Leibniz“. 1848. pag. 11 und 12 und in denselben: „Entdeckung der höheren Analysis“. 1855. pag. 41 und 42.

*) „Methodus fluxionum“. Probl. IV.

Curvengleichung weggeschafft wird. Wird nämlich $\sqrt{a^2 - y^2} = z$ gesetzt, so ergibt sich:

$$MS = z - \frac{b+y}{z} \cdot y - x$$

oder
$$-MS = -z + \frac{b+y}{z}y + x,$$

wobei das — Zeichen links, da es nur die Lage andeutet und es sich hier nur um die absolute Länge handelt, unberücksichtigt gelassen wird. Dann ergibt sich:

$$OS = -z + 2x + \frac{b+y}{z}y.$$

Nun folgert Newton, dass der Inflexionspunkt sich da befinde, wo OS ein Minimum sei. Wir haben also dem Vorigen zufolge nur die Fluxion von OS zu nehmen und diese $= 0$ zu setzen. So gelangen wir zu der Gleichung:

$$\frac{2a^2b - 3by^2 - y^3}{y^2\sqrt{a^2 - y^2}} \cdot a^2 = 0.$$

Es bestimmt sich also der Inflexionspunkt aus der Bedingung:

$$2a^2b - 3by^2 - y^3 = 0$$

oder:
$$y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0.$$

Es braucht nicht hinzugefügt zu werden, dass die Meinung nicht richtig ist, die Krümmung ändere sich, wenn die Abscisse plus oder minus der Subtangente ein Minimum ist; vielmehr wird der Inflexionspunkt gefunden, indem der zweite Differenzialquotient an dieser Stelle $= 0$ oder ∞ sein muss. In dem von Newton gewählten Beispiele aber ergibt sich zufälliger Weise durch sein Verfahren das Richtige, indem der zweite Differenzialquotient der Conchoide lautet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2b - 3by^2 - y^3}{(a^2b + y^3)^3}.$$

Indem wir diesen Werth $= 0$ setzen, erhalten wir Newton's Bedingungs-gleichung wieder. Wie erwähnt, ist dies jedoch nur Zufall. — Dagegen war er der erste, der eine richtige Formel für den Krümmungshalbmesser aufstellte*). Es sei nämlich AD (Fig. 15) eine Curve, TD die Tangente an dieselbe und d liege in der Verlängerung der Tangente. Der fragliche Krümmungshalbmesser, der also senkrecht zu TD steht, sei DC . Nun

*) „Methodus fluxionum“. Probl. V.

werde, wenn AB , BD die rechtwinkligen Coordinaten x , y des Curvenpunkts D sind, DG parallel der X -Achse gezogen und das Rechteck $DHCG$ construirt; von dem dem Curvenpunkte unendlich nahen Punkte d der Tangente werde nun dC gezogen und $de \perp DF$ gemacht. Auf CG werde ein Stück $Cg = 1$ angenommen und von g eine zur X -Achse parallele Gerade $g\delta$ gezogen, die die dC in f schneidet; $g\delta$ heisse z . Nun ist offenbar De das Moment von x , also $= \dot{x}0$, de das Moment von y , also $= \dot{y}0$, δf das Moment von z , und daher $= \dot{z}0$. Ferner haben wir die

Proportion: $CG : Cg = DF : \delta f$

d. h.: $CG : 1 = DF : \dot{z}0$

also ist: $CG = \frac{DF}{\dot{z}0}$

Nun aber ist: $DF = De + eF = \dot{x}0 + eF$

oder, da der Winkel FdD als ein Rechter angesehen werden kann, da d unendlich nahe bei D , Cd unendlich nahe bei CD liegt, und Winkel CDT

ein rechter ist, $DF = \dot{x}0 + \frac{de^2}{De} = \dot{x}0 + \frac{\dot{y}^2 0}{x} = \frac{\dot{x}^2 0 + \dot{y}^2 0}{x}$

folglich wird $CG = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xz}$

Weiter aber verhält sich:

$GD : g\delta = CG : Cg$,

d. h. $GD : z = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xz} : 1$

und es ist daher:

$GD = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xz} \cdot z$

Vermöge der Werthe von CG und GD ergiebt sich nun der Krümmungshalbmesser:

$CD = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xz} \sqrt{1 + z^2}$

Es verhält sich aber auch $g\delta : Cg = de : De$

d. h.: $z : 1 = \dot{y} : \dot{x}$

es ist also

$z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Wird dieser Werth für z in die Gleichung für den Krümmungshalbmesse eingesetzt, so nimmt sie die Gestalt an:

$$CD = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\dot{z}}$$

Gewöhnlich wird nun $\dot{x} = 1$ gesetzt, und dann wird noch einfacher:

$$CD = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{z}}$$

Man sieht, wie Newton hier durch Substitution von z für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ oder also,

wenn $\dot{x} = 1$ ist, für $\dot{y}$ die zweite Fluxion von y umgeht, und wie dieselbe in Folge dessen etwas Unbestimmtes und Unanschauliches bildet. Hat man nun den Krümmungshalbmesser gefunden, so ist es nicht schwer, die Gleichung der Evolute abzuleiten. Diess ist nämlich diejenige Curve, die die Eigenschaft hat, dass ein um sie geschlungener unausdehnbarer Faden, wenn er von ihr abgewickelt wird, mit seinem einen Endpunkte die eine Curve, die in Beziehung zur Evolute den Namen Evolvente führt, beschreibt. Es sei also OpP (Fig. 16) eine Curve und $Cp'P'$ eine zweite und zwar die Evolute der erstern, so ist es offenbar möglich, dass der um die $Cp'P'$ geschlungene Faden, noch bevor er abgewickelt wird, schon um ein Stück CO über C hinausragt. Ferner wird, indem nun die Evolute abgewickelt wird, so dass z. B. der ausgespannte Faden in die Lagen pp' , PP' kommt, derselbe die Evolute in den Punkten p' , P' berühren, also ihre Tangente sein, und offenbar ist jedes Stück pp' , PP' des Fadens der Krümmungshalbmesser der Evolvente OpP in den Punkten p und P , und endlich die Länge pp' , PP' stets gleich der des zugehörigen Evolutenbogens Cp' , CP' , von dem der Faden abgewickelt ward, plus dem constant hinzukommenden Stück CO , welches ϱ_0 heisse. Nennen wir nun die Coordinaten der gegebenen Evolvente, vom Punkte O aus gerechnet, OM , MP bezüglich x , y , die Coordinaten CM' , $M'P'$ der Evolute, die Abscisse vom Punkte C aus gerechnet, ξ , η , so ergibt sich leicht aus x , y die Gleichung der Evolute. Wir erhalten nämlich, wie man sich leicht überzeugt, wenn $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ wieder mit z bezeichnet und $\dot{x} = 1$ angenommen wird:

$$\xi = x + \frac{1 + \dot{y}^2}{\dot{z}} \cdot \dot{y} - \varrho_0$$

$$\eta = \frac{1 + \dot{y}^2}{z} - y.$$

Indem also für jede Curve leicht die Evolute gefunden werden kann, so kann man mit Hülfe einer jeden eine zweite Curve finden, die durch Aufsuchung des Krümmungshalbmessers der ersten rectificirt wird. Dies war das Mittel, durch welches Newton das Problem der Rectification zu lösen suchte*). Da man nun dem zufolge jede zu rectificirende Linie als Evolute einer andern ansehen muss, so kommt die Aufgabe darauf hinaus, aus der Evolute die Evolvente abzuleiten, ein Problem, welches weit schwieriger ist als das umgekehrte. Es blieb daher Newton nichts übrig, als von allen ihm bekannten Curven die Evoluten zu suchen; diese stellten dann die rectificabeln Linien vor, deren Länge durch den Krümmungshalbmesser der erstern gegeben war. Bei den meisten andern Linien war für Newton die Lösung der Aufgabe unmöglich. Dies ist also ein Umstand, durch den seine Fluxionsrechnung gegen Leibnizens Differenzialmethode auf das Entschiedenste in den Schatten tritt, indem letztere frei von dieser Beschränkung ist und jede Aufgabe, wenigstens bis zu jedem Grade der Genauigkeit lösen kann. — Ebenso unzureichend war das, was Newton über die Quadratur der Curven aufstellte**). Es ist schon oben, bei einer andern Gelegenheit, erwähnt worden, dass er, wenn die Fläche einer Curve durch z bezeichnet, unter der Abscissenachse eine Linie ON (Fig. 12) gleich der Einheit angenommen und die Ordinate MP , sowie MR zu gleicher Zeit fortbewegt werden, urtheilte, die Geschwindigkeit, mit der sich die Fläche $QOMP = z$ vergrößere, verhalte sich zur Geschwindigkeit, mit der sich das Rechteck $NOMR$ vergrößere, dessen Inhalt wegen $ON = MR = 1$ durch x ausgedrückt wird, wie MP zu MR , d. h. wie $y : 1$. Es gilt also die Proportion:

$$\dot{z} : \dot{x} = y : 1$$

oder: $\dot{z} : \dot{x} = y : 1$

und es ist daher $\dot{z} = y \dot{x}$

oder, wenn wir $\dot{x} = 1$ setzen: $\dot{z} = y$.

Um also z zu erhalten, muss man von dieser Fluxionsgleichung zur Fluen-

*) „Methodus fluxionum.“ Probl. X.

**) Ebenda. Probl. VII. IX.

tengleichung übergehen. Es ist aber bereits oben gezeigt worden, wie wenig ausreichend Newton's Methode, dies zu bewerkstelligen, war, und wenn irgend, so zeigt sich gerade hier der grosse Vortheil, den die Differenzial- und Integralrechnung gewährt, auf das Allerentschiedenste. Schon das ist von grosser Wichtigkeit, dass Newton den Uebergang von der Fluxionsgleichung $\dot{z} = y$ zur Fluentengleichung, die also $z = y'$ geheissen hätte, nirgends andeutet, indem er sich dieses Zeichens, sowie des für die Fluxionen höherer Ordnungen erst in dem „Tractatus de quadratum curvarum“ bediente, während die Integralrechnung schon frühe den allge-

meinen Ausdruck für eine Fläche, $\int y dx$ hinstellte. Was nun Newton's Verfahren in Bezug auf das Ausrechnen der Fläche selbst betrifft, so ist aus dem Früheren klar, dass er dies nur in den einfachsten Fällen direkt auszuführen vermochte. In allen etwas zusammengesetzten musste er entweder zur Entwicklung in Reihen seine Zuflucht nehmen oder ein anderes, gleich näher zu beschreibendes Verfahren anwenden. Es sei z. B. gesucht

die Fläche z der Curve, deren Gleichung ist: $y = \frac{1}{1+x^2}$. Dies muss Newton in eine Reihe auflösen; und zwar kann dies, da sich $\frac{1}{1+x^2}$

auch schreiben lässt $\frac{1}{1+\frac{x^2}{1}}$, auf doppelte Weise geschehen. Es ist also:

entweder $\dot{z} = y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

oder $\dot{z} = y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots$

folglich wird durch Uebergang zu den Fluenteu:

$$z = \frac{1}{1}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

oder:
$$z = - \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^5} - \dots \right)$$

und hiermit ist für Newton die Aufgabe gelöst. Es ist schon oben bemerkt worden, dass er die Con- oder Divergenz der von ihm angewandten Reihen nicht berücksichtigte, ebenso wenig kannte er die Summe $z = \text{Arctang. } x$

oder $z = - \text{Arctang. } \frac{1}{x}$ der hier angewandten Reihen. Wohl aber ge-

brauchte er die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zur Berechnung der natürlichen oder hyperbolischen, und mithin auch der künstlichen Logarithmen. Weit mehr Gewicht legt Newton auf die andere Methode der Quadratur*). Dieselbe ist folgende: Es sei eine Curve mit den Coordinaten x, y gegeben, deren Fläche F vom Anfangspunkte bis zur Abscisse x bekannt sei; wir suchen nun die Gleichung einer zweiten Curve von der Beschaffenheit, dass die Fläche f derselben bis zu einer Abscisse ξ , die z. B. die Hälfte, ein Drittel u. s. w., kurz eine willkürlich anzunehmende Function von x ist, auf eine gewisse, ebenfalls willkürlich zu bestimmende Weise von der ersten Fläche F abhängt, also eine Function derselben ist. Dadurch wird umgekehrt die Fläche f der zweiten Curve, deren Coordinaten ξ, η heissen, durch die bekannte Fläche F der ersten Curve mit den Coordinaten x, y bestimmt. Es ist also ganz dasselbe Verfahren, was er auch bei der Rectification einschlug. Als bekannte Curve, von der er ausging, nahm er die Kegelschnitte, und suchte also die Quadratur anderer Curven auf die derselben zurückzuführen, oder vielmehr aus den Gleichungen der Kegelschnitte die anderer Curven abzuleiten, deren Fläche zu der der Kegelschnitte in einem bestimmten Verhältnisse steht. Es sei also z. B. bekannt die Fläche F des Kegelschnitts, dessen Gleichung

$$y = \sqrt{\alpha x + \beta x^2}$$

ist. Es wird nun eine solche Gleichung zwischen ξ und η , also eine solche Curve gesucht, dass ihre Fläche f von 0 bis ξ sich aus der Fläche F ableiten lasse durch die Gleichung

$$f = 2xy - 3F.$$

Soll diese Bedingung erfüllt sein, so muss offenbar die Fluxion von f , die mithin $\eta\dot{\xi}$ ist, gleich sein der Fluxion der rechten Seite der letzten Gleichung. Es muss also die Gleichung bestehen,

$$\eta\dot{\xi} = 2x\dot{y} + 2y\dot{x} - 3y\dot{x} = 2xy - y\dot{x}$$

indem ja die Fluxion von $F = y\dot{x}$ ist. Wird nun aus der gegebenen Curvengleichung der Werth von $\dot{y}$ berechnet, und in die letzte Gleichung eingesetzt, so lautet dieselbe:

*) Ausser in der „Methodus fluxionum“ Probl. IX. L — LXII findet sich dieselbe auch im „Tractatus de quadratura curvarum“ 1704 behandelt.

$$\eta \dot{\xi} = \frac{\alpha x + 2\beta x^2 - \alpha x}{y} \cdot \dot{x} = \frac{\beta x^2}{y} \cdot \dot{x}$$

oder: $\eta \dot{\xi} = \frac{\beta x^2}{y} \dot{x}$

Nehmen wir nun an, zwischen den beiden Abscissen x und ξ , die natürlich von demselben Coordinatenanfangspunkte aus gerechnet werden, bestehe z. B. folgende Beziehung, es sei

$$x = \frac{1}{\xi^\gamma}$$

so wird: $\dot{x} = -\frac{\gamma}{\xi^{\gamma+1}} \cdot \dot{\xi}$

und $y = \sqrt{\alpha x + \beta x^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^\gamma} + \frac{\beta}{\xi^{2\gamma}}}$

Setzen wir diese Werthe für x und y in die letzte Fluxionsgleichung

$y \dot{\xi} = \frac{\beta x^2}{y} \dot{x}$ ein, so lautet sie:

$$y = -\frac{\beta \gamma}{\xi^{3\gamma+1} \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^\gamma} + \frac{\beta}{\xi^{2\gamma}}}}$$

oder

$$y = -\frac{\beta \gamma}{\xi^{2\gamma+1} \sqrt{\beta - \alpha \xi^\gamma}}$$

Diess ist also die Gleichung derjenigen Curve, die bis zur Abscisse

$\xi = \frac{1}{\sqrt[\gamma]{x}}$ eine Fläche $f = 2xy - 3F$ hat, wenn F die Fläche des Kegelschnitts $y = \sqrt{\alpha x + \beta x^2}$ bis zur Abscisse x ist. Nehmen wir z. B.

$\alpha = 2r$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, so bedeutet die Gleichung $y = \sqrt{\alpha x + \beta x^2}$,

die dann übergeht in $y = \sqrt{x(2r - x)}$

einen Kreis mit dem Halbmesser r , die Gleichung der andern Curve aber

geht dann über in $\eta = -\frac{\xi \sqrt{\xi}}{\sqrt{2r - \xi}}$

oder, wenn wir $\eta = -\eta'$ setzen, und dann wieder η statt η' schreiben, in

$$\eta = \frac{\xi \sqrt{\xi}}{\sqrt{2r - \xi}}$$

d. h. die andere Curve ist dann eine Cissoide (vergl. §. 1.), deren Erzeugungskreis der durch die erste Curve bestimmte ist. Indem ferner für

$\gamma = -1$ die Gleichung $\xi = \frac{1}{\sqrt[\gamma]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{\gamma}}}$ übergeht in $\xi = x$, so sehen wir

also: die Cissoide ist diejenige Curve, die die Eigenschaft hat, dass ein Flächenstück OMP (Fig. 17) bis zur Abscisse OM gleich ist dem zweifachen Rechteck $OMNR$ aus den Coordinaten des Erzeugungskreises (es ist nämlich $OMNR$ nichts anderes, als der geometrische Ausdruck für $2xy$) für dieselbe Abscisse, weniger der dreifachen sectorartigen Fläche $OMNO$ (dieselbe ist nämlich $= 3F$). Auf diese Weise ist also die Quadratur der Cissoide auf die des Kreises zurückgeführt. Newton wusste nun das Problem der Quadratur nicht anders zu lösen, als indem er ein Verzeichniss aller Curven entwarf, die sich mit Hülfe der Kegelschnitte quadriren liessen („Catalogus curvarum ad conicas sectiones relatarum“ bei Horsley). Es leuchtet ein, dass dieses indirecte Verfahren, indem man immer eine Curve mit Herbeiziehung einer anderen quadriert, hinter der directen Integralrechnung zurücksteht. Wir können das Kapitel von der Quadratur nicht verlassen, ohne noch auf etwas aufmerksam zu machen. Indem Newton sagt, die Linie MP (Fig. 12) stelle die Fluxion der Fläche z dar, meint er offenbar damit den numerischen Werth dieser Ordinate. Denn er drückt sich wohl nicht ohne Absicht so aus:*) Fluxiones per ordinatas illas (nämlich MP und MR) exponi possunt, propterea quod ordinatae illae sunt ut arearum augmenta nascentia.“ Er sagt also nicht, dass die letzten Ordinaten MP , MR die Fluxionen der Flächen seien, sondern nur, dass sie sich verhalten wie die Fluxionen. Es ist daher eine Bemerkung Raphson's**) nicht richtig, der sich dahin ausspricht: Es sei ein Unterschied zu machen zwischen der algebraischen und geometrischen Fluxion einer Fluente. Wenn z. B. gegeben sei $y^2 = 3ax^2$, wo y die Fläche einer Curve bedeute, so erhalte man durch Uebergang zur Fluxion: $2y\dot{y} = 6ax\dot{x}$ oder $\dot{y} = 3a \frac{x}{y} \dot{x}$, und wenn man $\dot{x} = 1$ setze, müsse man schreiben, nicht $\dot{y} = 3a \frac{x}{y}$, son-

*) „Tractatus de quadratura curvarum.“ Introductio.

**) Von Raphson's Werke: „The history of Fluxions, by the late Mr. Joseph Raphson, A. M. and R. S.“ London 1715 war mir nur eine Lateinische Uebersetzung von demselben Jahre zugänglich. Die angezogene Stelle findet sich daselbst in Cap. VI.

dern $\dot{y} = 3a \frac{x}{y} \cdot 1$; denn die Fluxion der Fläche sei das Rechteck aus der letzten Ordinate und der der Einheit gleich genommenen Fluxion $\dot{x}$ der Abscisse, ein Umstand, der bei Newton's Schreibweise nicht sichtbar sei. Indessen diesem kam es, wie erwähnt, nur auf die Zahlenwerthe an, der bei den Linien MP und MR derselbe ist, wie bei den Rechtecken, die dieselben als Grundlinie und zur gemeinsamen Höhe $\dot{x}$ (eigentlich musste Raphson auch sagen: $\dot{x}0$) haben. Auch Montucla*) sucht zu beweisen, dass wenn MM' (Fig. 18) $= 1$ sei, das Rechteck $MM'QP$ die Fluxion (dass er Fluxion mit Moment vermengt, ist schon oben erwähnt worden) der Fläche $OMPA$ sei. Der Beweis, den er hiefür giebt, ist folgender: Die genannte Fläche fluire mit beschleunigter Geschwindigkeit; dann sei offenbar das Dreieck PQP' durch die Beschleunigung hervorgebracht worden, um also die Geschwindigkeit oder Fluxion zu erhalten, müsse man es von der Flächenzunahme $MM'P'P$ abziehen, so bleibe übrig das Rechteck $MM'QP$, als mit der wahren Geschwindigkeit beschrieben. Es fällt sogleich in die Augen, dass dieser Beweis das zu Beweisende als bereits bekannt voraussetzt, denn dass das Dreieck PQP' durch die Beschleunigung hervorgebracht wird, kann nur dann behauptet werden, wenn man bereits weiss, dass die gleichförmige Geschwindigkeit das Rechteck $MM'QP$ hervorgebracht habe. Am deutlichsten aber geht die Richtigkeit der Behauptung, Newton habe bloss auf die Zahlen Rücksicht genommen, aus der Art hervor, wie er die höheren Fluxionen einer Fläche construiert.**). Nämlich so, dass von einer Fläche OMP_1 (Fig. 19) die Fluxion gesucht, diese als Curve OP_2 construiert, und von der Fläche derselben wieder die Fluxion gesucht werde u. s. w. Man sieht, dass dies eine rein formelle Auffassung ist, und es ist nicht einzusehen, wie Montucla hierin einen Vortheil der Fluxionsvor der Differenzialrechnung sehen kann, die ja mindestens ebenso gut von den höheren Differenzialen Rechenschaft giebt, als die Fluxionsmethode.

*) Montucla: „Histoire des Mathematiques.“ Tome II. pag. 370.

**) „Tractatus de quadratura curvarum.“ Propositio IX, Theorema VIII und Corollarium.

Nachdem so die Grundzüge von Newton's Verfahren erläutert sind, welches „Fluxionsrechnung“ in einem engeren Sinne, als derselbe hier gebraucht worden ist, genannt wird, mag, da eine Kritik bereits an den einzelnen Stellen gegeben ist, nur noch eine Bemerkung Platz finden. Man hat öfter die Fluxionsmethode der jetzt vielfach gebräuchlichen Grenzmethode nahe gestellt, und dies grossentheils mit gutem Rechte, indem Newton stets auf das Verhältniss der Fluxionen $\dot{y}$ und $\dot{x}$ kommt. Auf diese Weise umgeht er die Schwierigkeit, die den damaligen Mathematikern ein unüberwindliches Hinderniss schien, nämlich das Rechnen mit unendlich kleinen Grössen oder Null. Denn so lange die Incremente endlich sind und eine angebbare Grösse besitzen, hat ihre Anwendung im Calcul kein Bedenken, Newton lässt sie auch bis zu Null abrechnen, und nennt sie dann Momente oder auch*) „incrementa momentanea“ oder „momenta nascentia sive evanescentia;“ er hütet sich aber wohl, mit diesen zu rechnen, sondern lässt im Zustande des Verschwindens die Fluxionen, endliche und bestimmte Grössen, gewissermassen als Reserve an die Stelle der zum weiteren Dienste untauglich gewordenen Momente einrücken, auf diese Weise das Rechnen mit unendlich kleinen Grössen, welche Null sein und doch noch einen von Null verschiedenen Werth besitzen sollen, auf das Glücklichste vermeidend; und wenn er sagt:**) „Volui ostendere, quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in Geometriam introducere“ und ebendasselbst: „Quantitates mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic desidero,“ so muss man unbedingt zugeben, dass er nicht mehr verspricht als er in der That gehalten hat. Unstreitig würde der grosse Vortheil, den seine Methode durch die Vermeidung des zu Widersprüchen führenden Begriffs des Unendlichkleinen, wodurch zugleich der unnatürlichen Auffassung der Curven als Polygone vorgebeugt wurde, über die Differenzialmethode, wie sie lange Zeit hindurch dargestellt ward, gewonnen hatte, — unstreitig würde dieser grosse Vortheil ihr schon frühe den Vorrang vor der Leibnizischen

*) „Princ. phil. nat.“ Lib. II. Sect. II. Lemma II. pag. 251 der ersten Ausgabe und „Tractatus de quadratura curvarum.“ Prop. I. Probl. I. Demonstratio.

**) „Tractatus de quadratura curvarum.“ Introductio.

Theorie verschafft haben, wenn ihn nicht Newton dadurch erkaufte hätte, dass er die Rechnung aus dem Gebiete der Geometrie weg in das der Phoronomie hinüberspielte. Dazu kam aber noch als zweites sehr wichtiges Moment, dass die Fluxionsrechnung Newton's eines hinlänglich passenden und ausgebildeten Algorithmus entbehrte, was sich besonders beim Uebergehen von den Fluxionen zu den Fluenten als ein Nachtheil sehr bemerklich macht. Denn es war ja hauptsächlich die Auffindung eines solchen Algorithmus, um die sich damals Alles drehte. So kann es denn nicht wunderbar sein, wenn die Leibnizische Differenzialrechnung, welche alle Forderungen, die in dieser Beziehung gestellt werden können, auf das Vollkommenste befriedigt, der Fluxionsrechnung trotz ihrer sichereren Begründung sehr bald den Rang ablief.

§. 4.

Die Fluxionsmethode unter Maclaurin.

Da, wie im vorigen §. gezeigt worden ist, Einiges in Newton's Verfahren nicht hinreichend klar und deutlich war, so konnte es nicht fehlen, dass dasselbe mannigfache Angriffe zu erleiden hatte. Gegen dieselben*) trat Maclaurin auf**), um einerseits alle Zweifel, die noch in der Fluxionsrechnung übrig seien, zu zerstreuen, andererseits die Leibnizische Differenzialmethode anzugreifen. Der letzteren machte er zwei Dinge zum Vorwurfe, einmal nämlich, dass das Unendlichkleine für den menschlichen Verstand unfassbar, sodann, dass Leibniz selbst den Begriff des Unendlichkleinen für eine blosse „Fiction“ erklärt habe. Was das Letztere bedeuten soll, wird in dem Abschnitte über die Differenzialmethode behandelt werden. Hier wenden wir uns zur Art und Weise, wie Maclaurin die Fluxionsmethode begründete. Dies ist nun folgende:

Er suchte alle Sätze nach der synthetischen Methode der Alten zu beweisen, um den höchsten Grad von Genauigkeit und Schärfe zu erreichen,

*) Insbesondere soll die schon oben erwähnte anonyme Schrift: „The analyst etc.“ Ursache zur Verfassung von Maclaurin's Werk gewesen sein.

**) Von diesem Werke: „Treatise of Fluxions“ by Colin Maclaurin. Edinburgh 1742, war mir eine zu Paris 1746 erschienene Französische Uebersetzung zugänglich.

zugleich aber auch die Grundbegriffe, über die sich Newton theils sehr kurz, theils gar nicht ausgesprochen hatte, zu erläutern. Ueber dieselben erklärt er sich nun dahin: Obschon der Raum, dem er eine objective Realität zuzuschreiben scheint, als unendlich gedacht werden muss, so kann man sich doch einen Theil desselben, den ein bewegter Körper durchläuft, als veränderlich denken; dasselbe gilt von der Zeit. Hierauf geht Maclaurin zur Erklärung von „Geschwindigkeit“ über, die zu geben Newton gänzlich verabsäumt hatte. Er schliesst sich dabei an Barrow (s. §. 2) an und spricht sich dahin aus: Geschwindigkeit sei eine gewisse Kraft, die bewirke, dass ein Körper in einer gewissen Zeit einen gewissen Raum durchlaufe; es komme übrigens, fügt er hinzu, auf diese Definition nichts an, wem sie nicht gut zu sein scheine, der könne auch die Geschwindigkeit auf andere Weise erklären; immer aber müsse eine gleichförmige Geschwindigkeit durch den in einer gewissen Zeit durchlaufenen Raum gemessen werden, eine veränderliche durch den Raum, der zurückgelegt würde, wenn die beschleunigende Kraft in einem Momente aufhörte. Mit Hülfe dieses Axioms beweist Maclaurin nun viele rein phoronomische Sätze, wie erwähnt, streng nach der Methode der Alten. Einer der wichtigsten ist folgender: Man nehme an, zwei Körper *A* und *B* bewegten sich in gerader Linie, und zwar so, dass die Bewegung des *B* gleichförmig, die des *A* veränderlich sei. Wenn (Fig. 20) *A* in *C* stehe, befinde sich *B* in *D* und ihre Geschwindigkeiten seien dargestellt, die constante des *B* durch *DG*, die des *A* im Punkte *C* durch *CH*; ferner sei bekannt, dass in derselben Zeit, in der *A* den Raum *CE* durchlaufe, *B* die Strecke *DF* zurücklege; endlich sei *Cg* von einer solchen Länge, dass die Proportion gilt:

$$DF : CE = DG : Cg.$$

Bewiesen werden soll, dass die Linie *gH*, wenn man *DF* und *CE* vermindert, kleiner werde als irgend eine Grösse. Zu dem Zwecke werde ein Stück *HI* beliebig gross angenommen, und gezeigt, dass *gH* kleiner werde als dieses ganz beliebige *HI*. Nun erhellt, dass der Körper *A*, wenn er nach *E* gekommen ist, eine andere Geschwindigkeit hat, als in *C*, bei einer beschleunigten Bewegung eine grössere, bei einer retardirten eine kleinere, zugleich aber, dass, je kleiner *CE* ist, die Differenz der Geschwindigkeiten in *C* und *E* um so geringer wird. Es sei also *CE* so gross, dass sich diese Differenz zur constanten Geschwindigkeit des Körpers *B* verhält wie

$HI : DG$. Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit des Körpers B mit v , die des Körpers A im Punkte C mit v_1 , im Punkte E mit v_2 , so verhält sich nach der Voraussetzung:

$$v_1 : v = CH : DG \quad \alpha)$$

und vermöge der über CE gemachten Annahme:

$$v_2 - v_1 : v = HI : DG.$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt nun:

$$v_2 - v_1 : v_1 = HI : CH$$

$$\text{oder:} \quad v_2 : v_1 = HI + CH : CH$$

$$\text{oder:} \quad v_2 : CI = v_1 : CH. \quad \beta)$$

Verbinden wir diese Proportionen mit der obigen $\alpha)$, so ergibt sich:

$$v_2 : CI = v : DG. \quad \gamma)$$

Nehmen wir nun an, die Bewegung des Körpers A sei beschleunigt, so leuchtet ein, dass das Verhältniss $CE : DF$ d. h. des in einer Zeit, während welcher eine Beschleunigung stattgehabt, von A zurückgelegten Raumes zu dem in derselben Zeit von B gleichmässig durchlaufenen Raume grösser sein müsse, als das Verhältniss $CH : DG$, d. h. als der Raum, den A in der Zeit 1 zurücklegen würde, wenn die in C statthabende Geschwindigkeit unverändert bliebe, zu der constanten Schnelligkeit DG . Es ist also:

$$CE : DF > CH : DG.$$

Nach der Voraussetzung aber verhält sich:

$$CE : DF = Cg : DG,$$

$$\text{mithin ist auch:} \quad Cg : DG > CH : DG,$$

$$\text{also:} \quad Cg > CH. \quad \delta)$$

Ebenso aber ist klar, dass das Verhältniss $CE : DF$ kleiner werden müsse, als das Verhältniss der Geschwindigkeit, die der mit Beschleunigung von C nach E sich bewegende Körper A am Ende E erlangt hat, zu DG . Aus $\beta)$ aber folgt, dass, wenn die Geschwindigkeit in C , v_1 gleich CH ist, die Geschwindigkeit in E , v_2 gleich CI sei. Wir haben also die zweite Ungleichung:

$$CE : DF < CI : DG,$$

$$\text{für die wir, weil} \quad CE : DF = Cg : DG$$

war, auch schreiben können:

$$Cg : DG < CI : DG.$$

$$\text{Es ist also:} \quad Cg < CI. \quad \epsilon)$$

Wir haben also nach δ) und ε) die Ungleichungen:

$$CI > Cg; \quad Cg > CH,$$

folglich ist auch: $CI - CH > Cg - CH,$

$$\text{folglich:} \quad gH < HI.$$

Da nun HI beliebig angenommen war und so klein gemacht werden kann, als man will, so ist der Satz bewiesen, dass gH kleiner als jede auch noch so kleine Zahl wird. Da dies aber nun so ist, können wir statt der Proportion:

$$DF : CE = DG : Cg,$$

worin $Cg = CH + gH$ ist, da gH verschwindend klein wird, schreiben:

$$DF : CE = DG : CH.$$

Diese Beziehung wird offenbar gelten, wenn $HI = 0$, also auch $CE = 0$ ist. Wir können also sagen: Für ein verschwindend kleines Intervall kann die beschleunigte Geschwindigkeit als gleichförmig angesehen werden.

Mit Hülfe dieses Fundamentaltheorems stellt nun Maclaurin verschiedene geometrische Sätze auf. So ergibt sich hieraus folgender: Wenn in einem Parallelogramme, während die eine Seite an Grösse unverändert bleibt, die andere entweder gleichförmig oder mit ungleichförmiger Geschwindigkeit ihre Grösse ändert (fluit), so geschieht diese Veränderung (fluxio) im directen Verhältniss der beweglichen Seite. Maclaurin nimmt deswegen das Parallelogramm zum Maasse für alle Aenderungen, die an Flächen vorgehen. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn eine Seite eines Dreiecks mit gleich- (oder mit ungleich) förmiger Geschwindigkeit fluit, die Fläche desselben nicht gleichmässig ab- oder zunimmt. Nun ergibt sich auch der Beweis eines anderen, sehr wichtigen Satzes, nämlich dieses: Wenn die Fläche eines Dreiecks die Zeit, in der die Linie OM (Fig. 21) von M bis M_1 wächst, hindurch gleichmässig wüchse, so würde sie um ein Parallelogramm $MPTM_1$ zunehmen, welches gleich ist dem Increment $ABDC$ des als Maass angenommenen Parallelogramms d. h. desjenigen Rechtecks, welches durch gleichmässiges Fluiren in derselben Zeit die Fläche C_1D_1BA erlangt hat, in der das Dreieck durch beschleunigtes Fluiren zur Fläche OMP gelangt ist. Denn nehmen wir an, das Rechteck $MPTM_1$ sei kleiner als $ABDC$, so nehme man auf MP , nachdem man es nöthigenfalls verlängert hat, eine Länge MS_1 so an, dass $MS_1T_1M_1 = ABDC$ wird. Die Linie S_1T_1 wird nun die Dreiecksseite in R_1 schneiden. Man ziehe jetzt $R_1Q_1 \parallel MP$. In derselben Zeit, in der sich

OM bis Q_1 geändert hat, habe sich nun C_1A bis zu E_1 geändert; da nun sowohl OM als C_1A gleichmässig flui ren, haben wir die beiden Proportionen:

$$MS_1T_1M_1 : MS_1R_1Q_1 = MM_1 : MQ_1$$

und

$$ABDC : ABF_1E_1 = AC : AE_1.$$

Der Voraussetzung nach aber verhält sich:

$$AC : AE_1 = MM_1 : MQ_1$$

und nach der Annahme ist: $ABDC = MS_1T_1M_1$.

Daraus folgt: $MS_1T_1M_1 : MS_1R_1Q_1 = MS_1T_1M_1 : ABF_1E_1$,

also: $MS_1R_1Q_1 = ABF_1E_1$.

Da aber die Dreiecksfläche von der Zeit an, wo die Ordinate in MP stand, beschleunigt gewachsen ist, so ist das Trapez MPR_1Q_1 grösser als ABF_1E_1 , welches durch gleichförmiges Wachsthum des Rechtecks C_1D_1BA entstanden ist. Es würde sich also ergeben:

$$ABF_1E_1 < MPR_1Q_1$$

und also auch: $MS_1R_1Q_1 < MPR_1Q_1$,

was unmöglich ist. Es kann also $ABDC$ nicht grösser sein als $MPTM_1$.

Ebenso kann man zeigen, dass $ABDC$ auch nicht kleiner sein kann als $MPTM_1$. Denn wenn MS_2 auf MP so angenommen, dass $MS_2T_2M_2 = ABDC$ und das Rechteck $MS_2R_2Q_2$ construirt wird, so würde, wenn in derselben Zeit, in der OM rückwärts um MQ_2 flui rt, AB rückwärts um AE_2 sich ändert, die Proportion gelten:

$$MS_2T_2M_2 : MS_2R_2Q_2 = MM_1 : MQ_2$$

und $ABDC : ABF_2E_2 = AC_1 : AE_2$,

folglich würde sein: $ABF_2E_2 = MS_2R_2Q_2$.

Weil nun aber das Trapez Q_2R_2PM kleiner ist als das Rechteck F_2E_2BA , so müsste also auch Q_2R_2PM kleiner als $MS_2R_2Q_2$ sein, was auch nicht möglich ist. Mithin muss $MPTM_1 = ABDC$ sein. Auf dieselbe Weise nun zeigt Maclaurin, dass, wenn die Geschwindigkeit einer Curve von einem bestimmten Punkte an gleichförmig wäre, das Increment der Fläche ein Rechteck sei, dessen eine Seite die letzte begrenzende Ordinate, dessen andere das Increment der Abscisse ist, welches als Einheit angenommen werden kann. Ferner sprach Maclaurin folgendes Theorem aus: Es sei eine mit z. B. beschleunigter Geschwindigkeit flui rende Curve gegeben und ST (Fig. 22) sei die Tangente in einem ihrer Punkte P , so ist QT die Fluxion der Ordinate. Denn wäre z. B. T_1Q dieselbe, so ziehe man PT_1 .

Diese wird die Curve in einem zweiten Punkte R_1 treffen, so dass Q_1R_1 ein Increment der Ordinate MP wäre, welches mit gleichmässiger Geschwindigkeit in derselben Zeit entstände, in der die Abscisse durch die Strecke MN_1 flüirt. Aber Q_1R_1 ist ein Increment der mit beschleunigter Geschwindigkeit fluirenden Ordinate; es ist also die Annahme, dass QT_1 , welches grösser als QT ist, die Fluxion sei falsch. Aus ganz ähnlichen Gründen kann es auch keine Strecke QT_2 sein, die kleiner ist als QT ; mithin ist QT selbst die Fluxion. — Auf ganz dieselbe Weise behandelt Maclaurin die übrigen Probleme der Fluxionsrechnung, z. B. die Auffindung der Maxima und Minima, des Krümmungshalbmessers, der Asymptoten u. s. w., und es kann nicht geleugnet werden, dass er keine Mühe scheute, um die Beweise so scharf als möglich zu führen. Gleichwohl begeht er den Fehler, Fluxionen und Momente zu vermengen. Hierin aber liegt ein bedeutenderer Unterschied von Newton, als man auf den ersten Anblick glaubt. Er setzt z. B. die Fluxion $\dot{x}$ der Abscisse $= 1$, ebenso wie auch Newton $\dot{x}$ als Einheit annahm. Aber letzterem war $\dot{x} = 1$ die unconstruirbare Zeitzunahme $= 1$; die Zunahme der Abscissenlinie bezeichnete er (Newton) durch $\dot{x}0$ und dies ist ihm eine quantitas oder incrementum evanescens oder nascens, d. h. ein momentum, welches er nicht $= 1$ setzen konnte, denn es ist unendlich klein. Für Maclaurin hingegen, der $\dot{x}$ als Zunahme der Abscisse ansieht, wird es möglich, auch für die Momente, oder, wie er es nennt, Fluxionen der Fläche, Ordinate u. s. w. Figuren nachzuweisen, die den gegebenen Fluents homogen sind. Der Widerspruch aber, wie ein solches Moment Null und doch constuirbar sein könne, bleibt ungelöst. Indem aber Maclaurin so die phoronomische Bedeutung der Fluxionen gänzlich in den Hintergrund stellt und verdrängt, tritt er unvermerkt aus dem Gebiete der Fluxions- auf das der Differentialmethode, die er gerade in seinem Werke zu bekämpfen gedachte. — Bevor wir jedoch die Anwendung, die Maclaurin von der Fluxionsrechnung auf Geometrie machte, verlassen, muss noch erwähnt werden, dass er auch einen Versuch machte, die geometrische Bedeutung der successiven Fluxionen an räumlichen Gebilden nachzuweisen. Es sei z. B. eine Pyramide $OABC$ (Fig. 23) gegeben, so wird nach Maclaurin ihre erste Fluxion dargestellt durch das Prisma $ABCDEF$, ebenso wie die eines ebenen Dreiecks durch ein Rechteck dargestellt wird, dessen eine Seite die letzte O

dinate ist. Nun kann das Parallelogramm $GDFH$ als die Fluxion des Dreiecks DEF , wenn seine Seite ED in der Richtung von E nach G flüirt, angesehen werden. Es ist also das durch die Rechtecke $CDFB$ und $DGHF$ bestimmte Parallelepipedon $BCDFHGIK$ die Fluxion des Prismas $ABCDEF$, oder, da dieses die erste Fluxion der gegebenen Pyramide war, die zweite Fluxion derselben. Also ist das Prisma $BCDFHG$ die Hälfte der zweiten Fluxion der gegebenen Pyramide $OABC$. Die Fluxion dieses Prisma's $BCDFHG$ ist nun das Prisma $BFHLMN$. Der dritte Theil desselben ist die Pyramide $BFHL$. Dieselbe ist also der dritte Theil der Hälfte der zweiten Fluxion der gegebenen Pyramide oder der sechste Theil derselben u. s. w. *). Dies ist das Wichtigste, was in Bezug auf die Anwendung, die Maclaurin von der Fluxionsmethode auf Geometrie machte. Er selbst aber giebt zu, dass das bisher Gesagte bei Functionen, die entweder, weil sie mehr als drei Veränderliche enthalten, oder aus sonstigen Gründen nicht construirt werden können, unanwendbar sei, indem dann der bisher festgestellte Begriff der Fluxion oder Geschwindigkeit verloren gehe.

Er stellt also für diese Fälle eine andere Definition von „Fluxion“ auf, nämlich folgende: Fluxion sei das Verhältniss der Incremente zweier Veränderlichen, deren eine auf irgend eine Weise von der anderen abhängt. Man sieht nun offenbar, wie weit Maclaurin davon entfernt ist, etwas zur Verdeutlichung von Newton's Lehre beizutragen. Denn dieser hatte dieselbe Definition von Fluxion unabänderlich beibehalten, wodurch denn bei der Behandlung von Functionen mit mehr als drei Veränderlichen eine Unklarheit entstanden war, indem im Grunde nur zwei Fluents, die eine als Repräsentant der Zeit, die andere des Raumes gedacht werden können. Maclaurin vermeidet nun diesen Uebelstand, aber auf eine Weise, durch die er zugleich das Fundament der Fluxionslehre umwirft. Anstatt also Newton's Theorie von dem erwähnten Schaden zu heilen, versetzt er ihr einen tödtlichen Stoss und weiss sich nur dadurch zu helfen, dass er zur Differenzialrechnung seine Zuflucht nimmt. Denn die neue Definition von

*) Wenn ich nicht irre, findet sich in: Johann Karl Fischer's „Neue Ansichten über die Grundprincipien der Differenzialrechnung“. Leipzig 1831. eine ganz ähnliche, wenn nicht dieselbe Erklärung der Differenzialquotienten höherer Ordnungen, wie sie Maclaurin giebt.

„Fluxion“ ist offenbar nichts anderes, als die von „Differenzialquotient“. Doch sehen wir zu, wie er diesen eben eingeführten Begriff gebraucht. Zunächst sucht er die allgemeinen Regeln aufzustellen, nach denen die Fluxionen der einfachsten Functionen gebildet werden und beginnt mit der Betrachtung von $\frac{\mu}{\nu}A$, wenn A eine gleichmässig wachsende Grösse bedeutet. Das constante Increment derselben heisse (wie in Newton's Princ. phil. nat.) a ; dann ist also die gesuchte Fluxion vermöge der hier in Anwendung kommenden Definition das Verhältniss der Incremente von $\frac{\mu}{\nu}A$ zu a . Es seien nun drei auf einander folgende Werthe der willkürlich Variabelen: $A - a, A, A + a$;

so entsprechen ihr die drei Werthe der abhängig Variabelen:

$$\frac{\mu}{\nu}(A - a), \frac{\mu}{\nu}A, \frac{\mu}{\nu}(A + a).$$

Ihre constante Differenz oder das Increment derselben ist, wie man gleich sieht: $\frac{\mu}{\nu}a$. Da sich nun verhält $\frac{\mu}{\nu}a : a = \frac{\mu}{\nu} : 1$, so ist $\frac{\mu}{\nu}$ die Fluxion der Function $\frac{\mu}{\nu}A$. Schwieriger war auch für Maclaurin die Behandlung des Falles, wo die fragliche Fluxion nicht constant ist. Es sei z. B. gegeben die Function von A , $B = A^2$, so sind ihre successiven Werthe:

$$(A - a)^2, A^2, (A + a)^2$$

und die Differenzen derselben:

$$2Aa - a^2, 2Aa + a^2.$$

Offenbar ist nun das Verhältniss $2Aa - a^2 : a$ kleiner, $2Aa + a^2 : a$ grösser als das gesuchte Verhältniss, oder die Fluxion von $B = A^2$. Maclaurin sucht nun zu beweisen, dass dieses Verhältniss $2Aa : a$ sei. Denn, sagt er, wäre es grösser als $2Aa : a$, wäre es z. B. also $2Aa + pa : a$, so nehme man ein Increment der willkürlich Veränderlichen A , $= \nu$ an, und zwar $\nu < p$. Dann würde also, wenn die Meinung richtig wäre, dass $2A + p$ die Fluxion von A^2 sei, das dem Increment ν von A entsprechende Increment von A^2 , sein $2A\nu + p\nu$, und da $\nu < p$ ist, so würde $2A\nu + p\nu > 2A\nu + \nu^2$ sein. Es würde also das Increment grösser sein als das für das Intervall von A bis $A + \nu$ mögliche grösste Increment $2A\nu + \nu^2$. Mithin führt diese Annahme, dass die Fluxion $> 2A$ sei, auf einen Widerspruch. Nehmen wir aber an, sie sei kleiner als $2A$, z. B. $= 2A - p$, so lässt sich auf ähnliche Weise,

indem wieder $\nu < p$ angenommen wird, zeigen, dass dann das Increment von A^2 , $2A\nu - p\nu < 2A\nu - \nu^2$ sein müsste, was wieder unmöglich ist, da letzteres das kleinste ist, welches A^2 in dem Intervalle von $A - \nu$ bis A besitzt. Hieraus folgert nun Maclaurin, dass das gesuchte Verhältniss weder $2Aa + pa : a$ noch $2Aa - pa : a$, sondern nur $2Aa : a$ sein könne. Es ist aber leicht zu sehen, dass dieser Beweis mangelhaft ist. Denn es ist offenbar noch zu untersuchen, ob man auch dann zu etwas Widersinnigem geführt werde, wenn man nicht, wie bisher $\nu < p$, sondern $\nu > p$ annimmt. Thun wir dies, so werden wir auf die Ungleichungen geführt: $2A\nu + \nu^2 > 2A\nu + p\nu$ und $2A\nu - \nu^2 < 2A\nu - p\nu$, die etwas Widersprechendes nicht involviren; es würde mithin auf diese Weise nur bewiesen sein, dass das fragliche Verhältniss zwischen $2A + \nu$ und $2A - \nu$ liegen muss, was man schon im Voraus weiss. Ebenso wenig überzeugend ist sein Beweis, dass die Fluxion von A^n gleich sei nA^{n-1} . Lassen wir nämlich mit Maclaurin A um das Increment a zunehmen, so erhalten wir nach dem binomischen Satze:

$$(A + a)^n - A^n = \frac{n}{1} A^{n-1} \cdot a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2} a^2 + \dots$$

Ebenso aber ist:

$$na(A + a)^{n-1} = \frac{n}{1} A^{n-1} \cdot a + \frac{n(n-1)}{1} A^{n-2} a^2 + \dots$$

Da nun, was auch n für eine Zahl sei, in beiden Reihen die Zahl der Glieder gleich gross ist, in der zweiten aber die Nenner kleiner sind, so erhalten wir offenbar die Ungleichung:

$$(A + a)^n - A^n < na(A + a)^{n-1}.$$

Zugleich aber folgt aus der ersten der beiden Gleichungen:

$$(A + a)^n - A^n > naA^{n-1}.$$

Wir haben also die Ungleichungen:

$$na(A + a)^{n-1} > (A + a)^n - A^n > naA^{n-1}.$$

Um nun zu beweisen, dass die Fluxion des Ausdrucks A^n gleich nA^{n-1} sei, nimmt Maclaurin zuerst wieder an, sie sei grösser, z. B. $nA^{n-1} + r$. Dass dies nicht möglich sei, sucht er nun so zu zeigen: Es werde eine solche Grösse p genommen, dass

$$nA^{n-1} + r = n(A + p)^{n-1},$$

so würde also das Increment von A^n sein $= n(A + p)^{n-1}$. Ertheilen wir nun dem A ein kleineres Increment, z. B. ν , als p , so würde das Increment

von A^n sein $= n\nu(A+p)^{n-1}$. Da aber die Ungleichung gelten muss:

$$n\nu(A+p)^{n-1} > n\nu(A+\nu)^{n-1},$$

nach dem Vorigen aber:

$$n\nu(A+\nu)^{n-1} > (A+\nu)^n - A^n$$

ist, so würde folgen: $n\nu(A+p)^{n-1} > (A+\nu)^n - A^n$,

was unmöglich ist, da $(A+\nu)^n - A^n$ das grösstmögliche Increment von A^n

für das Intervall von A bis $A+\nu$ ist. Ebenso ergibt sich auch die Un-

zulässigkeit der Annahme, die Fluxion sei kleiner als nA^{n-1} , z. B. $nA^{n-1} - r$.

Allein auch hier verabsäumt Maclaurin wieder die Annahme $\nu > p$ zu be-

leuchten. Es scheint auch ihm selbst dieser Beweis nicht hinlänglich ge-

wesen zu sein, denn er sucht die Richtigkeit des in Rede stehenden Satzes

noch auf eine andere, aber der Fluxionsmethode ferner stehende Methode

zu zeigen. Aus den Ungleichungen nämlich:

$$na(A+a)^{n-1} > (A+a)^n - A^n > naA^{n-1}$$

folgert er: $n(A+a)^{n-1} > \frac{(A+a)^n - A^n}{a} > nA^{n-1}$;

woraus, wenn man a verschwinden lässt, sich ergibt: die Fluxion von A^n ist gleich nA^{n-1} , ein Beweis, der offenbar, da hier das Increment a verschwindend gedacht werden soll, gänzlich der Differenzialrechnung angehört.

Nachdem Maclaurin so die Aufsuchung der Fluxion behandelt, wendet er sich zur Auffindung der Fluentengleichung aus der der Fluxionen. Da er hierin fast ganz sich an Newton anschliesst, so soll hier nur die Art und Weise, wie er zu der nach ihm genannten Reihe gelangte, erwähnt werden. Er entwickelte diese nach der zu seiner Zeit üblichen Methode der unbestimmten Coefficienten, indem er unter der Voraussetzung, jede Function y von x lasse sich in eine unendliche Reihe verwandeln von der Form:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$$

A_0, A_1, A_2 etc. zu bestimmen suchte. Es sei nun ein bestimmter Werth von y für eine bestimmte Abscisse bekannt, es sei z. B. für $x = 0, y = f(0)$, so folgt sogleich, dass $A_0 = f(0)$

sein müsse. Lassen wir aber x um das Increment $\dot{x}$ zunehmen, gehen zu der Fluxion unserer Reihe über, und setzen dann $x = 0$, so folgt, wenn wir das Increment von y bei dem Werthe $x = 0$ durch $\dot{A}_0$ bezeichnen:

$$\dot{A}_0 = A_1 \cdot \dot{x},$$

folglich: $A_1 = \frac{\dot{A}_0}{x}$.

Gehen wir zur zweiten Fluxion über, so ergibt sich ebenso: $A_2 = \frac{\ddot{A}_0}{x} \cdot \frac{1}{1.2}$

u. s. w. Es wird also:

$$y = A_0 + \frac{\dot{A}_0}{x} \cdot \frac{x}{1} + \frac{\ddot{A}_0}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

worin $A_0 = f(0)$ ist.

Schliesslich mag noch die Art und Weise erwähnt werden, wie Maclaurin den bereits vor ihm von Taylor entdeckten und nach demselben genannten Lehrsatz darstellte*). Er that dies folgendermaassen: Es sei die Gleichung gegeben: $y = Ax^n + Bx^r + Cx^s + \dots$, die wir natürlich als die Ordinatengleichung einer Curve DEF (Fig. 24) ansehen können. Es sei in derselben $AC = x$, $CF = y$. Jetzt werde $e \pm u$ für x gesetzt (in unserer Figur ist der Fall, der durch das obere, das $+$ Zeichen angedeutet wird, angenommen, indem wir $AB = e$, $BC = u$, mithin $AC = AB + BC$ oder $x = e + u$ setzen), die Glieder $(e \pm u)^n$, $(e \pm u)^r$, $(e \pm u)^s$ u. s. w. nach dem binomischen Satze entwickelt, und Alles nach Potenzen von u geordnet, so erhält man:

$$y = [Ae^n + Be^r + Ce^s + \dots] \pm [nAe^{n-1} + rBe^{r-1} + sCe^{s-1} + \dots]u + \left[\frac{n(n-1)}{1.2} \cdot Ae^{n-2} + \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot Be^{r-2} + \frac{s(s-1)}{1.2} \cdot Ce^{s-2} + \dots \right] u^2 \pm \dots$$

Wird nun $u = 0$ gesetzt und die der Abscisse $AB = e$ zugehörige Ordinate BE durch v bezeichnet, so erhalten wir also:

$$v = Ae^n + Be^r + Ce^s + \dots$$

Das erste Glied unserer Reihe für y stellt also nichts anderes vor, als die Ordinate v ; aus dem Werthe von v ergibt sich nun sogleich:

$$\dot{v} = [nAe^{n-1} + rBe^{r-1} + sCe^{s-1} + \dots] \dot{e},$$

also ist: $[nAe^{n-1} + rBe^{r-1} + sCe^{s-1} + \dots] = \frac{\dot{v}}{\dot{e}}$.

Das zweite Glied der Reihe für y stellt also nichts anderes vor als $\frac{\dot{v}}{e} \cdot u$; ferner ergibt sich durch nochmaliges Uebergehen zu den Fluxionen:

*) Maclaurin: „Epistola secunda ad Martin Folkes de aequationibus, in quibus dantur radices impossibiles.“

$$[n(n-1)Ae^{n-2} + r(r-1)Be^{r-2} + s(s-1)Ce^{s-2} + \dots] = \frac{\ddot{v}}{e^2},$$

wenn $\ddot{v}$ die zweite Fluxion von v bezeichnet. Das dritte Glied der Reihe für y ist also $\frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\ddot{v}}{e^2}$ u. s. w. Wir können also die Gleichung für y

schreiben:
$$y = v \pm \frac{u}{1} \cdot \frac{\dot{v}}{e} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\ddot{v}}{e^2} \pm \dots$$

Dies ist aber der Taylor'sche Satz. Denn wenn $y = CF = f(x) = f(e \pm u)$ ist, so ist $v = f(e)$; $\frac{\dot{v}}{e}$ ist nichts anderes als $\frac{df(e)}{de}$, wenn wir e als Va-

riabele ansehen, $\frac{\ddot{v}}{e^2}$ ist dasselbe wie $\frac{d^2f(e)}{de^2}$ u. s. w. Wir können also unserer Reihe die Gestalt geben:

$$f(e \pm u) = f(e) \pm \frac{u}{1} \cdot \frac{df(e)}{de} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2f(e)}{de^2} \pm \dots$$

Die Bedingungen der Convergenz der Taylor'schen Reihe untersuchte Maclaurin nicht.

Fassen wir noch einmal kurz zusammen, was über das Verhältniss der Maclaurin'schen Darstellung der Fluxionsrechnung zu der von Newton befolgten gesagt worden ist, so war dies hauptsächlich zweierlei, einmal die Vermengung des Begriffs von „Fluxion“ mit dem von „Moment“, womit zugleich ein Verlassen der phoronomischen Principien verbunden ist, die Newton so geschickt zur Umgehung des Unendlichkleinen angewendet hatte; und zweitens die Aenderung der Definition von Fluxion, wodurch Maclaurin der Fluxionsrechnung vollends den Todesstoss versetzte, indem er sich durch seine zweite Erklärung der Differenzialmethode in die Arme warf. Nehmen wir noch hinzu die meist indirecten nach der Methode der Alten geführten langwierigen, und doch häufig ungenügenden Beweise, während nur diejenigen zureichend sind, die im Geiste der Differenzialrechnung gebildet sind, so wird die oben ausgesprochene Behauptung, dass durch Maclaurin ein Fortschritt in der Fluxionsrechnung nicht gemacht sei, nicht unbegründet erscheinen. Da nun nach ihm Niemand wieder mit solchem Eifer und Niemand mit besserem Glücke als er nach demselben Ziele strebte, so dürfen wir wohl sagen, dass die Fluxionsrechnung bereits unter Newton den höchsten Grad der Ausbildung erlangt habe, dessen sie fähig ist. Wir wenden uns daher zur Differenzialmethode.

Capitel II.

Die Differenzialrechnung.

§. 5.

Die Methode des Gregorius a S. Vincentio.

Obschon das Verfahren, welches der ausgezeichnete Mathematiker Gregorius a S. Vincentio zur Cubatur körperlicher Räume anwandte, nichts mit der Differenzialrechnung in dem Umfange, wie sie hier verstanden werden soll, gemein hat, sondern sich höchstens auf die Cavalieri'sche Methode des Untheilbaren stützt, so wird es doch erlaubt sein, da sein mit ungeheurem Fleisse und Scharfsinne abgefasstes Werk*) ziemlich selten ist, seine Theorie hier zu erklären. Er spricht sich über dieselbe dahin aus**): Es seien zwei ebene Figuren, z. B. das Rechteck $ABCD$ (Fig. 25) und der Viertelkreis FEG von gleicher Höhe gegeben, es sei also hier $AB = EF = EG$. Diese beiden Figuren, das Rechteck und der Viertelkreis, werden nun so gegen einander gesetzt, dass die Ebene der einen, z. B. des Kreis-Quadranten, senkrecht zu der der anderen, hier des Rechtecks, zu stehen kommt und dass zugleich zwei Linien beider Figuren, die von gleicher Länge sind, also AB und EF , zusammenfallen. Hierauf werden alle Rechtecke construirt, die die Ordinaten ab , ac , welche in den gegebenen Figuren zu derselben Abscisse***) Aa gehören, zu Seiten haben, so dass also Rechtecke von der Gestalt $abdc$ entstehen. Indem nun dasselbe Verfahren für alle Punkte der gemeinsamen Linie AB angewandt wird, entsteht natürlicher Weise eine räumliche Figur, in unserem Beispiele der vierte Theil eines Cylinders, dessen Halbmesser der des gegebenen Quadranten und dessen Länge $= AD$ ist. Indem so alle Linien ab und ac der gegebenen ebenen Figuren zur Construction von Rechtecken verwandt werden, in der Sprache der damaligen Mathematiker aber: „ein Rechteck aus

*) „Gregorii a Sancto Vincentio, ex societate Jesu, opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conï“. Antwerp. 1647.

**) Liber VII. Definitio.

***) Gregorius gebraucht natürlich die Ausdrücke „Abscisse“ und „Ordinate“ nicht, sie sind hier nur der grösseren Deutlichkeit wegen angewandt worden.

den Seiten ab und ac construiren“ bezeichnet wurde durch: „ducere ab in (oder sub) ac “, ein Ausdruck, der ursprünglich bedeutete: „ ab mit ac multipliciren“, so nannte Gregorius sein Verfahren: „ductus plani in planum“, indem der entstandene Körper als Inbegriff aller Rechtecke gewissermaassen als Rechteck aus den ebenen Figuren angesehen werden kann. Es erhellt aus dem eben Gesagten, dass durch den ductus plani eines Quadrats in ein anderes ihm gleiches, oder nach Gregorius' Ausdruck durch den „ductus quadrati in se“ ein Würfel entsteht u. s. w. Es kam nun Gregorius darauf an, den cubischen Inhalt des auf diese Weise entstandenen Körpers durch die Eigenschaften der gegebenen ebenen Figuren auszumitteln. Wie er hierbei verfuhr, mag an einigen Beispielen gezeigt werden. Es seien zwei congruente rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke gegeben, ABC und DEF (Fig. 26); ferner zwei congruente Halbkreise abc , dbe , deren Durchmesser $ac = de$ gleich den Katheten $AC = DE$ sei. Nun werde das eine Dreieck, z. B. ABC , so an DEF gelegt, dass AC mit DE , und $C\gamma$ mit $E\alpha$ zusammenfällt und die Ebenen beider senkrecht zu einander stehen. Dann werde aus den zu demselben Abstände $E\alpha$ gehörigen Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ ein Rechteck construirt. Wird dies mit allen Punkten von ED wiederholt, so entsteht offenbar ein keilförmiger Körper, dessen vordere Schneide AB oder, da A mit D zusammenfällt, DB (s. Fig. 27^a) und vertikal, dessen hintere EF und horizontal ist. Die hier beschriebene Construction, wo also die congruenten Dreiecke so zusammengelegt sind, dass die Rechtecksseiten $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ nicht von gleicher Länge sind (was nur in der Mitte von DE eintritt), bezeichnet Gregorius dadurch, dass er die Dreiecke „triangula subalterne in se ducta“ nennt. Ebenso werde nun der eine Halbkreis, z. B. abc so an den andern gelegt, dass ac auf de und $c\eta$ auf $e\epsilon$ fällt und ihre Ebenen senkrecht zu einander stehen; worauf dann wieder aus den zusammengehörigen Linien $\epsilon\zeta$, $\eta\vartheta$ das Rechteck construirt wird. Wird dies mit allen Ordinaten der Halbkreise vorgenommen, so entsteht offenbar ein Körper mit gekrümmten Seiten- und Oberflächen, dessen Gestalt man sich leicht vorstellen und zeichnen kann (s. Fig. 27^b). Es sind übrigens bei diesem „ductus circuli in se ipsum“ die Rechtecke, da stets $\epsilon\zeta = \eta\vartheta$ ist, Quadrate. Es handelt sich jetzt um Vergleichung des kubischen Inhalts der beiden aus Dreieck und Halbkreis entstandenen körperlichen Räume. Es sei nun $c\eta = c\epsilon = C\gamma = E\alpha$, d. h. wir verglei-

chen die Rechtecke des einen Körpers mit je den Quadraten des anderen, die gleiche Entfernung von ε und e haben. Da nach der Voraussetzung $ac = de = AC = DE$, finden sich stets solche Rechtecke. Der Flächeninhalt eines Quadrats aus einer Kreisordinate $\varepsilon\zeta$ ist nun nach einem bekannten Satze der Kreislehre gleich dem Rechteck aus den Seiten $d\varepsilon$ und $e\varepsilon$. Es ist also die Fläche jedes den aus dem Halbkreise entstandenen Körpers constituirenden Quadrats $= d\varepsilon \cdot e\varepsilon$. Im anderen Körper ist offenbar die Fläche eines constituirenden Rechtecks $= \alpha\beta \cdot \gamma\delta$. Da aber die Dreiecke gleichschenkelig sind, ist $\alpha\beta = D\alpha$, $\gamma\delta = C\gamma = E\alpha$. Es ist also die Fläche auch $= D\alpha \cdot E\alpha$, d. h. da $D\alpha = d\varepsilon$, $E\alpha = e\varepsilon$ ist, jedes Rechteck des keilförmigen Körpers ist gleich dem zugehörigen Quadrate des aus dem Halbkreise entstandenen. Hieraus folgert Gregorius, dass der Inhalt des ganzen ersten Körpers gleich sei dem des zweiten. Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich übrigens leicht. Denn nehmen wir im ersten Körper den Punkt E (Fig. 27^a) zum Mittelpunkte eines räumlichen Coordinatensystems, die Ebene des Dreiecks EDB zur XZ -, die des Dreiecks EDF zur XY -Ebene, und bezeichnen $E\alpha$ durch x , so ist, wenn wir den Durchmesser des Halbkreises, also auch die Länge ED durch $2r$ bezeichnen: $\alpha\beta = 2r - x$, mithin die Fläche des Rechtecks $\alpha\beta\mu\delta = x(2r - x)$ und der räumliche Inhalt v_1 des ganzen Körpers: $v_1 = \int_0^{2r} x(2r - x)dx$. Wird ebenso im anderen Körper e zum Coordinatenanfangspunkt gemacht, die Ebene des einen Halbkreises zur XZ -, die des anderen zur XY -Ebene genommen und $e\varepsilon$ durch x bezeichnet, so ist $\varepsilon\zeta = \sqrt{x(2r - x)}$, folglich die Fläche des Quadrats $\varepsilon\zeta\nu\vartheta = x(2r - x)$ und das Volumen v_2 des ganzen Körpers: $v_2 = \int_0^{2r} x(2r - x)dx$. Also ist in der That $v_1 = v_2$. Gregorius sucht diesen Satz auf folgende Art zu beweisen: Es seien drei Flächen gegeben, ABC , DEF , GHI (Fig. 28) der Art, dass, wenn $AK = DL = GM$ sei, die Proportion gelte: $BK : MH = MH : LF$, d. h. dass das Rechteck aus BK und LF gleich sei dem Quadrate von MH . Wenn nun die Linien AC , DE , GI , die als gleich vorausgesetzt werden, in gleiche Theile OK , QL , SM getheilt, die Linien ON , QP , SR und NT , PU , RV gezogen werden, so entsteht offenbar, wenn dem ductus plani in planum

gemäss aus den Flächen ABC und DFE der Körper construirt und ebenfalls aus der dritten Fläche GHI durch ductus plani in se ein Körper erzeugt wird, in ersterem ein durch die Fläche $OKTN$, $QLUP$, im zweiten ein durch das Rechteck $SMVR$ bestimmtes Parallelepipeton, die an kubischem Inhalte einander gleich sind. Da nun, schliesst Gregorius weiter, jeder Körper durch solche Parallelepepida ausgefüllt (exhauriri) werden könne, so folge die Richtigkeit des obigen Schlusses. Wir hören also von ihm selbst, dass die Methode, auf die er die seinige gründete, die Exhaustionsmethode der Alten war*).

§. 6.

Barrow's Tangentenmethode.

Wiederum müssen wir, wie bei der Fluxions-, so auch bei der Differenzialmethode den ausgezeichneten Mann Isaac Barrow unter denen nennen, die dieselbe anbahnten. Allerdings scheint Barrow auf seine im §. 2. auseinandergesetzte Fluxionsmethode das grösste Gewicht gelegt zu haben; denn wenn er in seinem bereits oben angezogenen Werke sagt**): er theile das sogleich näher zu beschreibende Verfahren auf Anrathen eines

*) Dass Gregorius' Methode nicht auf Bewegung beruhe, wie Gerhardt in seiner „Entdeckung der höh. Analys. 1555“ pag. 38 sagt, darauf habe ich bereits in Grunert's Archiv Bd. XXV aufmerksam gemacht. Ich bemerke hier noch hinzu, dass in einem in derselben Schrift abgedruckten Manuscript Leibnizens vom 29. October 1675 meine Meinung vollständig bestätigt wird; indem Leibniz daselbst erst sagt (pag. 123 und 124), er könne Gregorius' Methode nicht gebrauchen: *Ut tamen multiplicatio illa fieri in rebus intelligatur, sic agendum: Volumus spatium quod repraesentet omnes p in omnes l , non poterunt servire ductus Gregori a St. Vincentio, quibus figurae in figuris dicuntur, sic enim non ducitur una ordinata in alias omnes, sed una in unam.* Hier also ist „ductus“ identisch mit „multiplicatio“. Nachdem Leibniz so gesagt, er könne Gregorius' Methode nicht gebrauchen, stellt er mit den Worten: „Sed haec vetera; Ecce jam novum“ ein eigenes Verfahren auf und in diesem findet eine Anwendung der Bewegung statt. Ganz ausdrücklich aber, wie es scheint, bezeichnet Leibniz bewegen hier überall durch *ferre*, im Gegensatz zu dem *ducere* des Gregorius, welches eben multipliciren bedeutet.

**) Isaac Barrow: Geometrical lectures. Lecture X.

Freundes (Newton's) mit, so scheint es fast, als habe er selbst es für nicht wichtig genug erachtet. Das erwähnte Verfahren ist nämlich eine Methode, die Subtangente einer Curve, folglich auch die Tangente zu finden, mithin eine Lösung des Tangentenproblems. Die Regel, die er an genanntem Orte aufstellt, ist nun folgende: Man nehme einen unendlich kleinen Bogen PP' (Fig. 29) der Curve, ziehe die zu den Punkten P und P' gehörigen Ordinaten MP , $M'P'$ und endlich die Linie PQ parallel der Abscissenachse. Hierauf bilde man nach der charakteristischen Eigenschaft der Curve ihre Gleichung, die die unendlich kleinen Grössen PQ , QP' enthält. Die Quadrate und Producte derselben vernachlässige man. Dann setze man das Aggregat aller mit den Grössen PQ , QP' nicht behafteten Glieder gleich Null und substituïre schliesslich für QP' die Ordinate MP des Punktes, an dem die Tangente angelegt werden soll, und für PQ die fragliche Subtangente, so ist letztere durch die so erhaltene Gleichung bestimmt. Es sei z. B. die Subtangente gesucht einer Curve von der Beschaffenheit, dass die Entfernung OP jedes Curvenpunktes P von dem Coordinatenanfangspunkt O so gross sei als die Länge AB , wenn OA eine constante Grösse b hat. Bezeichnen wir nun mit Barrow $PQ = MM' = e$, $QP' = a$, die Coordinaten des Punktes P , $OM = x$, $MP = y$, die des unendlich nahen Curvenpunktes P' , $OM' = x'$, $M'P' = y'$, so haben wir offenbar die Gleichung:

$$\overline{OP}^2 = (x' - e)^2 + (y' - a)^2$$

oder, wenn wir die Potenzen von e und a als verschwindend vernachlässigen und für OP das der Voraussetzung nach ihm gleiche AB setzen:

$$\overline{AB}^2 = x'^2 + y'^2 - 2ex' - 2ay'.$$

Zugleich aber ergibt sich aus der Figur die Proportion:

$$x' - e : y' - a = b : AB,$$

folglich wird:

$$AB = \frac{y' - a}{x' - e} \cdot b.$$

Erheben wir diesen Ausdruck auf das Quadrat und vernachlässigen wieder die Quadrate von e und a , so erhalten wir:

$$\overline{AB}^2 = \frac{y'^2 - 2ay'}{x'^2 - 2ex'} \cdot b^2.$$

Setzen wir die beiden für $\overline{AB}^2$ gefundenen Werthe zu einer Gleichung zusammen, so lautet dieselbe:

$$x'^2 + y'^2 - 2ex' - 2ay' = \frac{y'^2 - 2ay'}{x'^2 - 2ex'} \cdot b^2,$$

oder:

$$x'^4 + x'^2 y'^2 - 2ex'^3 - 2ax'^2 y' - 2ex'y'^2 + 4e^2 x'^2 + 4aex'y' = b^2 y'^2 - 2ab^2 y'.$$

Werden auch hier nach Barrow's Vorschrift die Quadrate und Producte der unendlich kleinen Grössen e und a vernachlässigt, so ergibt sich:

$$x'^4 + x'^2 y'^2 - 4ex'^3 - 2ax'^2 y' - 2ex'y'^2 = b^2 y'^2 - 2ab^2 y',$$

welcher Gleichung wir auch die Form geben können:

$$4ex'^3 + 2ax'^2 y' + 2ex'y'^2 - 2ab^2 y' = x'^4 + x'^2 y'^2 - b^2 y'^2.$$

Nun soll nach Barrow's Angabe die rechte Seite, die frei von den Factoren a und e ist, gleich Null gesetzt werden. Diese Vorschrift, die auf den ersten Anblick wunderbar erscheinen könnte und über die Barrow sich nicht weiter ausspricht, hat folgenden Grund: Suchen wir die Gleichung der vorliegenden Linie, so ergibt sich dieselbe auf folgende Weise. Da $OP = AB$ sein soll, ist

$$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2.$$

Zugleich aber ist auch $AB = \frac{y}{x} \cdot b$.

Wird letzterer Werth von AB quadriert und beide Ausdrücke für $\overline{AB}^2$ gleichgesetzt, so erhalten wir die gesuchte Curvengleichung:

$$x^2 + y^2 = \frac{y^2}{x^2} \cdot b^2,$$

oder:

$$x^4 + x^2 y^2 - b^2 y^2 = 0.$$

Da nun P' ein Punkt derselben Curve ist, muss auch die Beziehung statt haben:

$$x'^4 + x'^2 y'^2 - b^2 y'^2 = 0.$$

Wir sehen also, dass das von den unendlich kleinen Grössen freie Aggregat in der nach Barrow's Verfahren erhaltenen obigen Gleichung die auf Null reducirte Curvengleichung, also in der That $= 0$ ist. Setzen wir also die rechte Seite unserer Gleichung $= 0$, so nimmt sie die Form an:

$$2ex'^3 + ax'^2 y' + ex'y'^2 - ab^2 y' = 0.$$

Hierin nun soll für a die Ordinate y , für e die Subtangente, die durch s bezeichnet werden mag, und für x' , y' gesetzt werden x , y . Denn offenbar lässt sich die letzte Gleichung schreiben:

$$2x'^3 + \frac{a}{e} x'^2 y' + x'y'^2 - \frac{a}{e} b^2 y' = 0.$$

Da nun für verschwindend kleine a und e das Verhältniss $\frac{a}{e}$ übergeht in das der Ordinate zur Subtangente, also in $\frac{y}{s}$, da dann ferner zugleich x' , y' in x , y übergehen, so erhalten wir:

$$2x^3 + \frac{y}{s}x^2y + xy^2 - \frac{y}{s}b^2y = 0,$$

oder:

$$2sx^3 + x^2y^2 + 3xy^2 - b^2y^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$s = \frac{b^2 - x^2}{2x^2 + y^2} \cdot \frac{y^2}{x}$$

und in der That ist dies, wie man sich auch auf anderem Wege überzeugt, der Ausdruck für die Subtangente der gegebenen Curve.

Dies möge hinreichen, Barrow's Tangentenmethode kennen zu lernen. Man sieht aus dem in §. 2 und hier Gesagten, wie nahe er der Entdeckung der Fluxions- sowohl als der Differenzialrechnung war. Wie es scheint aber, erkannte er die Wichtigkeit seiner Methode, namentlich der letzteren, (der aber Wurzelgrössen und Brüche noch Hindernisse waren, die allemal erst beseitigt werden mussten), nicht an und so gelangte der Ruhm der Erfindung an andere. Jedenfalls ist es von grosser Wichtigkeit, dass hier zum ersten Male Zeichen, nämlich e und a , für unendlich kleine Grössen vorkommen und dass das Gesetz des Vernachlässigens hier aufgestellt wird. Dass Newton's Theorie eine Ausbildung der von Barrow aufgestellten Bewegungsmethode ist, wird aus §. 2 und §. 3 erhellen, dass aber die hier entwickelte Methode des Unendlichkleinen nicht ohne Einfluss auf Leibnizen's Theorie gewesen, dürfte wenigstens wahrscheinlich sein, da derselbe im Postscriptum eines im April 1703 an Jacob Bernoulli gerichteten Briefes*), in dem er den Stand seiner mathematischen Kenntnisse im Jahre 1672 und die weitere Ausbildung derselben schildert, sagt: „Paulo post incidit in manus meas Geometria Universalis Jac. Gregorii Scoti (nicht zu verwechseln mit Gregor. a S. Vinc.), huic videbam eandem artem esse perspectam (quamvis demonstrationibus ad morem Veterum obscuratam) quemadmodum a Barrovio demum cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem meorum theorematum praereptam vidi“; und in einem Manuscripte vom 1. November

*) Gerhardt: „Die Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz“. 1848. Beilage I. pag. 31. u. 32. und „Leibnizen's mathematische Schriften, herausgegeben von Dr. Gerhardt“. Halle 1855. pag. 73.

1675 *) heisst es in Uebereinstimmung damit: „Pleraque theoremata Geometriae indivisibilium, quae apud Cavalerium, Vincentium, Wallisium, Gregorium, Barrovium extant, etc.“ Es wird daher wohl gerechtfertigt erscheinen, wenn wir sagen, dass sich bei Barrow die Keime sowohl der Fluxions- als der Leibnizischen Differenzialrechnung finden; letztere freilich unentwickelter als die der ersteren Methode **).

§. 7.

Einige unmittelbar vor Veröffentlichung von Leibnizens Differenzialrechnung aufgestellte Methoden.

Da es nicht ohne Interesse sein dürfte, den Stand der mathematischen Wissenschaften auf dem Continente kurz vorher, ehe Leibniz mit seiner Differenzialrechnung hervortrat, kennen zu lernen, indem nur dadurch der Eindruck, den die Veröffentlichung der letzteren hervorrief, und ihre Bedeutung beurtheilt werden kann, so mögen einige in der von Leibniz 1682 gegründeten Zeitschrift: „Acta Eruditorum Lipsiensia“ niedergelegte Theorien hier Platz finden. Sie beziehen sich fast alle auf die schon früher genannten drei Probleme, der Tangenten, der Maxima und Minima und der Quadratur. Es ist bereits bei Gelegenheit der Darstellung von Newton's Methode erwähnt worden, dass er schon frühe die Quadratur der Parabeln irgend eines Grades kannte. Indessen auch Newton war noch nicht der erste gewesen, der das Gesetz derselben gefunden hatte, vielmehr war dasselbe bereits von Wallis in seiner 1655 erschienenen „Arithmetica infinitorum“ aufgestellt worden ***) , indem er bewies, der Flächeninhalt einer durch die Ordinatengleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ bestimmten Curve sei

*) Gerhardt: „Die Entdeckung der höheren Analysis.“ 1855. Beilage II. pag. 129.

**) Der von Gerhardt in der „Entd. d. höh. Anal.“ 1855. pag. 48 ausgesprochenen Ansicht, Leibniz habe Barrow's Schriften erst nach Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis studirt, kann ich daher nicht beitreten.

***) „Enumeratio linearum tertii ordinis“ von Newton. Stirling's Ausgabe und Commentar pag. 45.

$\frac{n}{m+1} x^{\frac{m+n}{n}}$. Denselben Satz meint, wie man sogleich sieht, auch Leibniz, wenn er sich dahin ausspricht*): „Nostro seculo repertus est modus metiendi figuras curvilineas innumerabiles, imprimis quando ordinatae sunt in ratione utcunque multiplicata aut submultiplicata, directa aut reciproca abscissarum; erit enim area a curva ipsa et abscissa determinata ad rectangulum ex abscissa et ordinata lateribus, ut unitas ad numerum rationis multiplicationis exponentem unitate auctum.“ Von der Integralrechnung, in deren Besitz Leibniz, wie sich aus dem folgenden §. herausstellen wird, schon damals war, findet sich hier keine Andeutung.

Kaum weniger zurückhaltend als Leibniz waren die übrigen Mathematiker der damaligen Zeit. So findet sich eine bald auf diesen Aufsatz von Leibniz folgende mit den Buchstaben D. T. (wahrscheinlich: Dominus Tschirnhaus) bezeichnete Abhandlung**) über die Lösung des Tangentenproblems für Curven, deren Gleichung eine rationale ganze Function ist, in der nur eine Constante vorkommt. Es geht nämlich Tschirnhaus von dem Gedanken aus, dass das Tangentenproblem gelöst sei, wenn man die Länge *TO* (Fig. 30) d. h. die Subtangente weniger der Abscisse kenne. Er giebt nun an, diese Linie werde auf folgende Weise gefunden: Man bilde einen Bruch, dessen Zähler das Aggregat aller derjenigen Glieder ist, welche die in der Gleichung befindliche Constante in irgend einer Potenz als Factor haben, und multiplicire jedes dieser Glieder mit dem Exponenten der Constanten. Der Nenner findet sich, wenn wir das Aggregat bilden aller derjenigen Glieder, die eine Potenz der Abscisse *x* zu Factoren haben und jedes Glied mit dem Exponenten der Abscisse multipliciren, den Exponenten dieser selbst aber um die Einheit vermindern. Die Gleichung der Curve wird auch hier als in der auf 0 reducirten Form gegeben vorausgesetzt. Es sei z. B. die gegebene Curvengleichung:

$$4a^3xy + 3a^4y - a^5 - y^3 + 2ax - 3a^2xy^2 = 0,$$

so würde nach Tschirnhaus's Regel für die Strecke *TO* sich ergeben:

$$TO = \frac{2ax - 6a^2xy + 12a^3x^2y + 12a^4y - 5a^5}{2a - 3a^2y^2 + 8a^3xy}.$$

*) „Acta Eruditorum. 1682.“ pag. 42.

**) „Acta Eruditorum. 1682.“ pag. 391.

Der Beweis für dieses Verfahren fehlt jedoch und es dürfte sich auch wohl schwerlich ein solcher finden. Vielmehr liefert diese Operation in vielen Fällen etwas Unrichtiges. In unserem Beispiele müsste z. E., wie man sich leicht überzeugt, herauskommen:

$$TO = \frac{4ax - 6a^4y - 3a^5}{2a - 3a^2y^2 + 8a^3xy} = \frac{4x - 6a^3y - 3a^4}{2 - 3ay^2 + 8a^2xy}.$$

Das hier von Tschirnhaus aufgestellte Verfahren hat übrigens sehr viel Aehnlichkeit mit dem von de Sluze gefundenen. Aus dieser seiner Tangentenmethode leitete Tschirnhaus ein Verfahren ab, die Maxima und Minima zu bestimmen*). Er setzte in dem auf die eben beschriebene Weise gefundenen Bruche, der den Werth von TO angeben sollte, den Nenner $= 0$. Man sieht, dass dasselbe Princip zu Grunde liegt, wie bei Newton (s. §. 3). Letzterer suchte den Werth, für den die Subtangente $= 0$, Tschirnhaus den Werth, wo TO unendlich wird. Endlich machte er den Versuch, eine Regel für die Quadratur aufzustellen**). Sein Verfahren ist nämlich dieses: Ueber der Abscissenachse AC (Fig. 31) sei eine Curve AHD gegeben, die in allen Beziehungen, namentlich in Rücksicht auf ihre Fläche bekannt ist, ihre Ordinaten GH , CD etc. mögen durch y bezeichnet werden, während die Abscissen AG , AC x heissen. Zu jeder solchen Curve lässt sich nun eine andere Linie AFB finden, von der Beschaffenheit, dass ihre Fläche bis zu einer bestimmten Abscisse gleich ist dem Rechtecke aus derselben Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten Linie, dass also Fläche AGF = Rechteck $AGHI$, Fläche ACB = Rechteck $ACDE$ u. s. w.; die Ordinaten GF , CB dieser zweiten Curve heissen z . Es handelt sich nun darum, ihre Gleichung, also z ausgedrückt durch x zu finden, wenn die erste Linie AHD eine algebraische ist; denn diese sind ja die einfachsten. Tschirnhaus giebt nun folgendes Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe an: Die Gleichung der Linie AHD ist jedenfalls von einer der Formen:

$$by + ca + dx = 0,$$

$$by^2 + cay + dxy + ea^2 + fax + gx^2 = 0,$$

$$by^3 + cay^2 + dxy^2 + ca^2y + faxy + gx^2y + ha^3 + ia^2x + kax^2 + lx^3 = 0$$

u. s. w.,

*) „Acta Eruditorum“. 1683. pag. 123.

**) „Acta Eruditorum“. 1683. pag. 433.

je nachdem für AHD eine Linie ersten, zweiten, dritten etc. Grades angenommen worden ist. Nun setzt Tschirnhaus:

$$ca + dx = \gamma$$

$$ca + 2dx = \iota$$

$$ea^2 + fax + gx^2 = \delta$$

$$2ea^2 + 3fax + 4gx^2 = \kappa$$

$$ha^3 + ia^2x + kax^2 + lx^3 = \varepsilon$$

$$3ha^3 + 4ia^2x + 5kax^2 + 6lx^3 = \lambda$$

u. s. w.

und stellt den Satz auf, wenn die gegebene Linie AHD ersten Grades sei, so sei die Gleichung der gesuchten Curve AFB :

$$bz + \iota = 0; \quad 1)$$

sei die gegebene Linie AHD zweiten Grades, so sei die durch sie bestimmte Gleichung der gesuchten AFB :

$$\left. \begin{aligned} (2bz + \iota)^2 \cdot \delta - (2bz + \iota)(\gamma z + \kappa)\gamma + (\gamma z + \kappa)^2 \cdot b &= 0, \\ \text{oder wenn wir } 2bz + \iota = B, \gamma z + \kappa = C \text{ setzen:} \\ B^2 \cdot \delta - BC \cdot \gamma + C^2 \cdot b &= 0; \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

sei AHD vom dritten Grade, so sei die gesuchte Gleichung der von ihr abhängigen AFB , wenn wir $3bz + \iota = B$, $2\gamma z + \kappa = C$, $\delta z + \lambda = D$ setzen:

$$\left. \begin{aligned} B^3 \cdot \varepsilon^2 - B^2 C \delta \varepsilon + B C^2 \gamma \varepsilon - C^3 b \varepsilon + C^2 D b \delta - C D^2 b \gamma + D^3 b^2 \\ - (2\gamma \varepsilon - \delta^2) B^2 D + (3b \varepsilon - \gamma \delta) B C D - (2b \delta - \gamma^2) B D^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

wo nun überall für γ , δ , ε , ι , κ , λ ihre Werthe einzusetzen sind. Thun wir dies, so lautet also die im ersten Falle herauskommende Gleichung für die Linie AFB :

$$bz + ca + 2dx = 0.$$

Im zweiten Falle, wenn AHD vom zweiten Grade, also ein Kegelschnitt ist, erhält man durch Ausrechnung zunächst:

$$b(4b\delta - \gamma^2)z^2 + \iota(4b\delta - \gamma^2)z + (b\kappa^2 + \delta\iota^2 - \gamma\iota\kappa) = 0$$

und wenn nun für γ , δ , ι , κ ihre Werthe eingesetzt werden, nach einigen Reductionen:

$$\left. \begin{aligned} bz^2 + acz + 2dxz + a^2e + 2afx + 4gx^2 + \\ \frac{(d^2e + c^2g + bf^2 - cdf - 4beg)a^2x^2}{4a^2be + 4abfx + 4bgx^2 - a^2c^2 - 2acdx - d^2x^2} &= 0 \\ \text{oder: } bz^2 + acz + 2dxz + a^2e + 2afx + 4gx^2 - \\ \frac{[(cd - bf)f - (d^2 - 4bg)e - c^2g]a^2x^2}{(c^2 - 4be)a^2 + (cd - 2bf)2ax + (d^2 - 4bg)x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \alpha)$$

Eine ähnliche Gleichung ergibt sich im dritten Falle u. s. w. Eine Begründung dieser Sätze giebt Tschirnhaus auch hier nicht; wir untersuchen dieselben daher jetzt in Bezug auf ihre Richtigkeit und zwar auf folgende

Weise. Da jedes Flächenstück AGF , ACB gleich sein soll bezüglich dem Rechtecke $AGHI$, $ACDE$, so bestimmt sich also z aus der Gleichung:

$$\int z dx = xy,$$

oder:

$$z = \frac{d(xy)}{dx}.$$

Im ersten Falle nun ist die auf y reducirte Gleichung der gegebenen Linie AHD , die dann eine Gerade ist:

$$y = -\frac{ca + dx}{b},$$

also:

$$xy = -\frac{cax + dx^2}{b};$$

folglich wird:

$$z = -\frac{ca + 2dx}{b};$$

oder:

$$bz + ca + 2dx = 0.$$

In diesem Falle liefert also das von Tschirnhaus angegebene Verfahren etwas Richtiges. Ist aber AHD vom zweiten Grade, ihre Gleichung also:

$$by^2 + cay + dxy + ea^2 + fax + gx^2 = 0,$$

so wird $y = \frac{-(ac + dx) \pm \sqrt{(c^2 - 4be)a^2 + (cd - 2bf)2ax + (d^2 - 4bg)x^2}}{2b}.$

Wird dies nun mit x multiplicirt und dann nach x differenzirt, so erhält man als Gleichung der Linie AFB :

$$4b^2z^2 + 4abcz + 8bdxz + 4a^2be + 8abfx + d^2x^2 + 12bgx^2$$

$$- \frac{[(cd - 2bf)a + (d^2 - 4bg)x]^2 \cdot x^2}{(c^2 - 4be)a^2 + (cd - 2bf)2ax + (d^2 - 4bg)x^2} = 0$$

oder:

$$4b^2z^2 + 4abcz + 8bdxz + a^2c^2 + 8abfx + 16bgx^2$$

$$- \frac{[(c^2 - 4be)a + (cd - 2bf)x]^2 \cdot a^2}{(c^2 - 4be)a^2 + (cd - 2bf)2ax + (d^2 - 4bg)x^2} = 0$$

$\beta)$

Wir sehen also, dass die von Tschirnhaus gegebene Formel $\alpha)$ nicht richtig ist, obwohl sie in einem Falle, nämlich wenn in der Gleichung des gegebenen Kegelschnitts $c = e = 0$ ist, ein richtiges Resultat liefert, indem dann sowohl $\alpha)$ als $\beta)$ sich auf die Formel reduciren:

$$bz^2 + 2dxz + 2afx + 4gx^2 + \frac{f^2a^2}{4(af + gx)} = 0.$$

So giebt z. B. die von Tschirnhaus als Beispiel angeführte Annahme, die Linie AHD sei ein Kreis, ihre Gleichung also: $y^2 = 2ax - x^2$ oder $y^2 - 2ax + x^2 = 0$, also $b = 1$, $c = d = e = 0$, $f = -2$, $g = -1$ das richtige Resultat:

$$z^2 = \frac{9a^2x - 12ax^2 + 4x^3}{2a - x}.$$

In allen anderen Fällen aber, wo die Bedingung $c = e = 0$ nicht erfüllt ist, erhält man durch Tschirnhausens Methode etwas Fehlerhaftes. Er gebrauchte dieselbe übrigens auch um umgekehrt zu untersuchen, ob eine Curve $z = f(x)$ quadrirbar, d. h. auf eine algebraische $y = \varphi(x)$ zurückführbar sei. Zu dem Zwecke ist die obige Rechnung rückwärts zu machen. Ergiebt sich nun eine solche algebraische Linie $y = \varphi(x)$, so ist das Problem gelöst, ist aber eine solche Gleichung ($y = \varphi(x)$) nicht aufzufinden, so ist nach Tschirnhausens Ausdruck die Curve $z = f(x)$ nicht quadrirbar. Es versteht sich, dass auch dieses umgekehrte Verfahren nur in dem oben erwähnten Falle ein richtiges Resultat giebt*).

Bedeutungsvoller scheint die von Sturm kurz vor Leibnizens Veröffentlichung seiner Differenzialrechnung mitgetheilte**) Methode der Quadratur zu sein. Er erklärte dieselbe an dem einfachsten Beispiele. Es sei ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 32) aus den Seiten $AB = a$, $BC = b$ gegeben; gefragt wird, wie sich das Dreieck ABC zum Rechtecke verhält. Zu dem Zwecke theilt Sturm die Seiten AB , BC in dieselbe Anzahl gleicher Theile, z. B. in vier, und construirt nun die Rechtecke $LBCE$, $KLMF$, $IKNG$, $AIOH$, so ist offenbar, indem der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gleich ab ist:

$$\text{Der Flächeninhalt des Rechtecks } AIOH = \frac{1}{16} ab$$

$$,, IKNG = \frac{2}{16} ab$$

$$,, KLMF = \frac{3}{16} ab$$

$$,, LBCE = \frac{4}{16} ab,$$

*) Welchen Werth Tschirnhaus auf diese seine Methode legte, geht aus den Schlussworten des Aufsatzes in den Act. Erud., in dem er es bekannt machte, hervor. Er sagt daselbst: „Quod (sein Verfahren) qui bene considerabit, judicabit utique, nos hoc seculo Antiquorum inventa in Geometricis longissime praetervexisse, imo et ipsa Recentiorum inventa, hisce incredibili ratione aucta esse.“ Wenn man nach diesen Proben über Tschirnhausens damalige Kenntnisse urtheilen darf, möchte es kaum wahrscheinlich sein, dass Leibniz seine Rivalität in Rücksicht auf die Entdeckung der Differenzialrechnung zu fürchten gehabt habe. (Vergl. Gerhardt: Die Entd. d. höh. Anal. pag. 70). Doch wäre es möglich, dass die noch ungedruckten Manuscripte Tschirnhausens zu einem anderen Schlusse berechtigen.

**) „Acta Eruditorum.“ 1684. pag. 123.

Wird aber die Seite b in 6 Theile getheilt, so wird $y_1 = \frac{35}{6}a$, $y_2 = \frac{32}{6}a$, $y_3 = \frac{27}{6}a$, $y_4 = \frac{20}{6}a$, $y_5 = \frac{11}{6}a$, und die Flächen der Rechtecke werden: $\frac{36}{216} \cdot ab$, $\frac{35}{216} \cdot ab$, $\frac{32}{216} \cdot ab$, $\frac{27}{216} \cdot ab$, $\frac{20}{216} \cdot ab$, $\frac{11}{216} \cdot ab$, Ihre Differenzen sind:

$$-\frac{1}{216} \cdot ab, -\frac{3}{216} \cdot ab, -\frac{5}{216} \cdot ab, -\frac{7}{216} \cdot ab, -\frac{9}{216} \cdot ab$$

und die Differenz-Differenz:

$$-\frac{2}{216} \cdot ab, -\frac{2}{216} \cdot ab, -\frac{2}{216} \cdot ab, -\frac{2}{216} \cdot ab.$$

Sturm findet somit, dass bei der Parabelfläche die zweiten Differenzen constant sind, und zwar dass sie, da $\frac{1}{216} = \frac{1}{6^3}$ ist, umgekehrt proportional sind dem Cubus der Zahl der Theile, in die die Linie BC getheilt ist.

Hätten wir sie z. B. in 9 Theile getheilt, so würde sich $-\frac{2}{9^3} \cdot ab$, hätten wir sie in 12 Theile getheilt, $-\frac{2}{12^3} \cdot ab$ als constante zweite Differenz ergeben haben. Es ist dieses Resultat jedenfalls von Wichtigkeit für die Begründung des Satzes, dass man bei dem zweiten, dritten u. s. w. Differenzialquotienten im Nenner das Quadrat, den Cubus u. s. w. des Differenzials

der willkürlich Veränderlichen setzen und also $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w. schreiben darf und muss. *)

§. 8.

Leibnizens Differenzialrechnung.

Während so die grössten Mathematiker der damaligen Zeit nach dem allgemeinen Principe suchten, welches, wie wohl jeder von ihnen fühlte, der Schlüssel ist zur Auflösung der drei in ihrer Allgemeinheit immer noch ungelösten Probleme, ohne zu einem befriedigenden Resultate zu gelangen, führte eine glückliche Reihe von Umständen den gewiss am Vielseitigsten gebildeten Mann der damaligen Zeit, Gottfried Wilhelm v. Leibniz (1646—1716) im Jahre 1672 nach Paris. Zwar hatte sich derselbe bereits früher mathematische Kenntnisse erworben, und schon 1666 eine Schrift: „De arte combinatoria“ herausgegeben**), sowie sich mit der Theorie der Reihen,

*) Ein allgemeinerer Beweis dieses Satzes, nach derselben Methode geführt, findet sich in Snell's: „Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung.“ Theil II.

**) Guhrauer: „Gottfried Wilhelm v. Leibniz. Eine Biographie.“ Breslau 1846. Theil 1. pag. 37.

insbesondere der arithmetischen, und mit Physik *) und praktischer Mechanik **) beschäftigt; allein erst als er im genannten Jahre durch Geschäfte nach Paris geführt wurde und hier die Bekanntschaft des damals an seinem berühmten „Horologium oscillatorium“ arbeitenden Huygens machte, ward er veranlasst, sich weiter in den mathematischen Wissenschaften auszubilden, sowie sich mit den neuesten Erscheinungen auf diesem Gebiete von dem Auftreten Descartes an vertraut zu machen, während er zugleich durch den persönlichen Umgang mit Huygens in seinen Bestrebungen auf das Vortheilhafteste unterstützt ward. Von Paris aus ging er im Januar 1673 ***) nach London, wo er bis zu Anfang des März desselben Jahres blieb. Hier machte er die Bekanntschaft vieler berühmten Männer, und lernte u. a. den ihm schon durch Briefwechsel befreundeten Secretair der Londoner Societät, Oldenburg, persönlich kennen, ohne jedoch mit ihm, wie er selbst erzählt, über andere als physikalische und mechanische Dinge zu sprechen, hingegen blieb ihm Collins unbekannt †), der, sowie Barrow, bereits damals von Newton's „Methodus fluxionum“ unterrichtet war ††). Nach seiner Rückkehr nach Paris scheint er besonders dieselben Studien, denen er schon früher besondere Aufmerksamkeit geschenkt hatte, mit erweiterten Kenntnissen fortgesetzt und sich vorzüglich mit der Theorie der arithmetischen Reihen, sowie mit Mechanik beschäftigt zu haben, indem er zu letzterer in den Untersuchungen seines Freundes Huygens eine seiner natürlichen Neigung entgegenkommende Anregung fand. So kann es denn nicht wunderbar sein, wenn wir als Inhalt der frühesten aus jener Zeit da-

*) Im Jahre 1670 hatte er eine Abhandlung veröffentlicht: „Hypothesis Physica nova: seu Theoria motus concreti“ und „Theoria motus abstracti.“ Guhrauer. Th. 1. pag. 73.

**) Leibniz erfand 1672 eine die Pascal'sche an Vollkommenheit übertreffende Rechenmaschine. Guhrauer. Th. 1. pag. 113.

***) Guhrauer. Th. 1. pag. 124.

†) „Historia et origo calculi differentialis a G. G. Leibnitio conscripta.“ Herausgegeben von Dr. Gerhardt. Hannover 1846. pag. 7.

††) „Die Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz“. 1848. Von Gerhardt. pag. 20. Anm.; „Preface“ zu Buffon's Uebersetzung von Newton's Methodus fluxionum, pag. XV.; Newton: „Enumeratio linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusdem tractatus.“ auctore J. Stirling. pag. 45.

tirten, neuerdings herausgegebenen *) Manuscripte vom 25., 26., 29. October und 1. November 1675 mechanische Principien auf Geometrie angewendet finden, nämlich eine Methode, mit Hülfe der mechanischen Momente der von einer Curve eingeschlossenen Fläche in Bezug auf zwei parallele oder drei nicht parallele Gerade die Fläche selbst zu ermitteln. Der Fundamentalsatz, zu dessen Kenntniss Leibniz hier gelangt, ist der aus der Integralrechnung mittelst der partiellen Integration sich ergebende Satz, dass wenn die Gleichung einer Curve $y = f(x)$ ist und der Werth, den y für $x = b$ annimmt, durch c bezeichnet wird, die Beziehung statt hat:

$$\int_0^b yx dx = c \int_0^b x dx - \int_0^c dy \int_0^c x dx \text{ oder } \int_0^b yx dx = \frac{b^2 c}{2} - \frac{1}{2} \int_0^c x^2 dy.$$

Das Integral- und Differenzialzeichen wird hier noch nicht gebraucht, Leibniz bezeichnet vielmehr die Integration durch Vorsetzung des Wortes: „omnia“ und schreibt daher *omn. $yx \cdot a \cdot dx$* für $\int yx dx$, das Differenzialzeichen wird hier

noch gar nicht angewandt. In dem Manuscripte vom 29. October bezeichnet er das Differenzial der Ordinate y durch l und construirt hier das bereits von Barrow gebrauchte **) „triangulum characteristicum“, wie er (Leibniz) es nennt, oder das s. g. differenziale Dreieck ***). Zugleich findet er hier den Satz, dass, wenn p die Subnormale einer Curve, y ihre Ordinate bedeutet, *omn. $p = \frac{y^2}{2}$* ist, ein Theorem, von dessen Richtigkeit man

sich leicht überzeugt, denn die Subnormale p ist stets $= y \frac{dy}{dx}$, es bedeutet

also *omn. p* nichts Anderes als $\int \left(y \frac{dy}{dx} \right) dx$ oder $\int y dy = \frac{y^2}{2}$. Zugleich

tritt hier zum ersten Male das Integralzeichen $\int$ auf, indem er y durch

*) Gerhardt: „Die Entdeckung der höheren Analysis“. 1855. Beil. II. Wem diese Abhandlung Leibnizens nicht ganz verständlich sein sollte, den verweise ich auf meinen Aufsatz im XXV. Bande des Grunert'schen Archivs.

**) Isaac Barrow: „Geometrical lectures“. Lecture X.

***). Dem „Commercium epistolicum Joh. Collinsii et aliorum de analysi promota, jussu societatis regiae in lucem editum“. Londini 1712. Epistola D. G. G. Leibnitii ad Oldenburgh. London 1672/3. zufolge hat Leibniz das „triangulum characteristicum“ bereits im Jahre 1673 gefunden.

$\int l$ bezeichnet. Mit Hülfe dieses neu eingeführten Zeichens entwickelt Leibniz nun mehrere Sätze*), von denen jedoch ein Theil unrichtig ist, weil Leibniz auf diesem Standpunkte noch $\int l^2$ und $\left(\int l\right)^2$ d. h. also $\int y^2 dy$ und $\left(\int dy\right)^2$ für identisch hielt. So stellt er die Gleichung auf; $\int \frac{l^2}{2} = \int \int l l$ statt $\left[\frac{1}{2} \left(\int l\right)^2 = \int \int l l\right]$ d. h. $\frac{1}{2} \left(\int dy\right)^2 = \int dy \int dy$ oder $\frac{y^2}{2} = \int y dy$; folglich auch $\frac{x^2}{2} = \int x dx$. Er gelangt also durch einen Irrthum zu einem richtigen Satze. Leibniz setzt aber hinzu: „Nota: omnia haec theorematum vera de seriebus in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet assignabili“, also wenn die Differenzen mit den Gliedern verglichen keinen angebbaren Werth haben, daher unendlich klein sind. Unmittelbar nach dieser Bemerkung, die mithin schliessen lässt, dass ihm schon damals die Vorstellung des Unendlichkleinen vorschwebte, stellt er den Satz auf $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$, ohne sich darüber auszusprechen, wie er dazu gelangt sei. Wir finden also bereits hier die einfachsten Sätze der Integralrechnung: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ und $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Das Differenzial der willkürlich Variabelen wird Anfangs durch a bezeichnet mit der Bemerkung: „Intelligitur autem a esse unitatem“; obschon es also als Einheit gelten soll, wird es doch als Factor oder Divisor überall beibehalten. Bald darauf aber führt Leibniz das d als Differenzialzeichen ein mit den Worten: „ $\int$ autem significat summum, d differentiam.“ Er sieht also beide Zeichen als Symbole für entgegengesetzte Operationen, das Summiren und Differenzen - bilden an. Anfangs bezeichnet er das Differenzial von y nicht durch dy , sondern durch $\frac{y}{d}$; vom 1. November ab aber tritt stets die jetzt noch gebräuchliche Schreibweise, dy ein. Von Wichtigkeit ist es aber, dass Leibniz weder in dieser, noch in den meisten fol-

*) Dr. Gerhardt: Entd. d. höh. Anal. 1855. pag. 125 und 126.

genden Abhandlungen einen Unterschied in der Bezeichnung der endlichen und der unendlich kleinen Differenz macht, sowie er sich auch des Ausdrucks „Differenzial“ nirgends bedient, sondern stets von „Differenz“ spricht. Es ist nun aus dem Bisherigen ersichtlich, dass Leibniz auf ganz naturgemässe Weise zu der Aufstellung des $\int$ - und d -Zeichens gelangte, indem er durch sie nur Begriffe andeutete, die der Summe und Differenz, die ihm von seiner Untersuchung der arithmetischen Reihen her bekannt und geläufig waren. Dass jedoch ein Unterschied zwischen Summe und Integral, Differenz und Differenzial sei, deutet er durch seine Bemerkung über das Unendlichkleine an, ohne sich aber weiter darüber auszusprechen. Uebrigens tragen die bisher betrachteten Manuscripte unverkennbar den Stempel des im Schaffen begriffenen Geistes, der zwar ahnt, dass er auf dem Wege sei, eine wichtige Entdeckung zu machen, aber noch nicht zur Klarheit gelangt ist. Wesentlich, schon in der äusseren Bezeichnung, von der vorigen verschieden und klarer als dieselbe ist die nächste Abhandlung vom 11. November 1675*). Hier wird stets eine der Variablen, gewöhnlich x , als in einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung wachsend („Ponatur x progressionis arithmeticae“) d. h. das Differenzial derselben als constant angenommen („Ponendo ipsas x arithmeticas, erit $\frac{x}{d} = z$ constans“), und zwar oft als Einheit angesehen, wie es Leibniz bereits am 29. October ausgesprochen hatte. Hier aber wird in Folge dieser Bemerkung $\frac{x}{d}$, wo es als Factor oder Divisor vorkommt, mehrmals nicht geschrieben. Wenn nun Leibniz hier, wo er $\frac{x}{d}$ als eine constante Zahl z ansieht, dennoch den Satz $\int x = \frac{x^2}{2}$, von dem er am 29. October gesagt hat, er gelte nur für unendlich kleine Differenzen, anwendet, so ist dies auffallend, wird aber durch eine Anmerkung: „Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas x proximas“ erklärt, indem daraus hervorgeht, dass er dx oder $\frac{x}{d}$

) Gerhardt: Die Entdeck. d. höh. Anal. 1855. Beilage III. ()

zwar als constant, aber zugleich als unendlich klein angesehen habe. Merkwürdig ist es ferner, dass Leibniz schon damals*) den Werth von $\int \frac{dy}{y}$, wenigstens näherungsweise kennt, denn er schliesst**) aus der In-

tegralrechnung: $dy \int y + dy \int v = dx \int \frac{a^2}{y}$, worin $v = x \frac{dx}{dy}$ ist, mit der

Bemerkung: „Ponendo jam y progressionis Arithmeticae fiet“: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} =$

$dx \cdot \text{Log. } y$. Es ist also das Integral $\int \frac{a^2}{y}$ bis auf die Constante a^2 richtig

bestimmt. Wie Leibniz dazu gelangt ist, darüber giebt eine vorausgegan-

gene***) Bemerkung Aufschluss, wo er $w = \frac{a^2}{x}$ setzt und fortfährt: „Jam

$\int w$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae.“ Man sieht also,

dass Leibniz das Integral $\int \frac{a^2}{x} dx$ mit der logarithmischen Curve in Be-

ziehung setzte. Wahrscheinlich erkannte er, dass ein solches Integral

$\int \frac{a^2}{x} dx$ die Formel für die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel sei. Nun

hatte aber bereits Mercator in seiner 1668 erschienenen „Logarithmotechnia“

den Zusammenhang zwischen der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel

und den natürlichen Logarithmen aufgedeckt und Leibniz hatte sich bei

seinem Aufenthalte in London 1673 dieses Werk angeschafft†). Vermuth-

lich war er auf diese Weise zu der Erkenntniss gekommen, dass ein In-

tegral von der Form $\int \frac{a^2}{x} dx$ in Beziehung zu den Logarithmen stehe.

Dass er aber diese Beziehung nicht klar und deutlich erkannt hatte, ist daraus

ersichtlich, dass er $\int \frac{a^2}{y} = \text{Log. } y$ statt $= a \text{ Log. } y$ setzt; und auch in einem

*) Wahrscheinlich hat Gerhardt diese Stelle übersehen, indem derselbe pag. 64 seiner eben erwähnten Schrift, die Entdeckung des Werthes von $\int \frac{dy}{y}$ in den Juli 1676 setzt.

**) Gerhardt: D. Entd. d. höh. Anal. 1855. Beilage III, pag. 135.

***) Ebendasselbst. pag. 133.

†) Gubrauer's Biographie. pag. 127.

Manuscripte vom Juli 1676 drückt er sich bei dem Integrale $\int \frac{1}{y}$ nur unbestimmt so aus: „ $\frac{fc}{a} \int \frac{1}{y} = z$, quae est ad logarithmicam.“ Wichtig ist ferner, dass Leibniz bereits am 11. November 1675 sich überzeugt, dass $d\overline{v} \cdot \overline{\psi}$ nicht mit $dv \cdot d\psi$, und $d\frac{v}{\psi}$ nicht mit $\frac{dv}{d\psi}$ identisch ist. Indem er bei dieser Untersuchung*) sich fragt, ob $d(x^2)$ dasselbe sei wie dx^2 , lässt er x in x^2 um β wachsen, und bildet die Differenz $(x+\beta)^2 - x^2$, die er $= 2x\beta$ setzt. Indem also hier β^2 vernachlässigt wird, worüber jedoch Leibniz sich mit keinem Worte äussert, tritt wieder die Vorstellung des Unendlichkleinen hervor. Am 21. November 1675*) findet Leibniz bei Auflösung einer geometrischen Aufgabe den Werth von $dx y$, indem er zu der Gleichung gelangt: $y d\overline{x} = d\overline{x} y - x d\overline{y}$. Er erkennt zwar in derselben ein allgemeines für alle Curven geltendes Theorem, kann aber an dieser Stelle nichts damit anfangen. „Quod Theorema sane memorabile omnibus curvis commune est. Sed nihil ex eo novi ducetur, quia jam adhibuimus“ sind seine Worte über dasselbe. Auffällig ist es aber, wenn er, nachdem er bereits am 11. November den Werth von $\int \frac{a^2}{y}$ angegeben hat, hier sagt, er könne jede Integration ausführen, wenn die Veränderliche nicht im Nenner oder unter einem Wurzelzeichen vorkomme. Am folgenden Tage, den 22. November 1675**, geht er zum Tangentenproblem über, welches er auf dieselbe Weise zu lösen suchte, wie Descartes***). Nur wendet Leibniz statt des von demselben gebrauchten Kreises auch eine Gerade an und spricht sich dahin aus, dass jede Linie, deren Tangentengesetz man kenne, zur Ermittlung der Tangente einer anderen Curve dienen könne. Den speciellen Fall, wo die Gerade als Hülfscurve angenommen werde, erklärt er als das Princip der von de Sluze aufgestellten Methode. Zugleich aber spricht er den Gedanken aus, dasselbe Verfahren, nämlich eine Hülfscurve anzunehmen, könne auch zur Lösung des Problems der Quadratur

*) Gerhardt: „Die Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz.“ 1848. Beilage III.

**) Ebendasselbst. Beilage IV.

***) Dasselbst. pag. 10 u. 11.

benutzt werden, (wie es von Newton geschehen war; s. §. 2.), allein, fährt Leibniz fort, das sei eine sehr schwierige Sache: „Res eo redit ergo ut datis tangentium figurae datae proprietatibus examinemus quas eadem tangentes habeant relationes ad alterius figurae quae pro data sumetur, ordinatas aut tangentes. Hoc enim serviet ad figurarum quadraturas ex se invicem ducendas, sed exemplo opus, ut talia clarius intelligantur. Est enim res subtilissimae intricationis.“ Von seiner Differenzialmethode findet sich hier nicht die mindeste Spur, obschon eine Anwendung besonders des Integralzeichens, welches er ja als Summenzeichen aufgefasst und definiert hatte, gerade bei der Quadratur so nahe liegt und dessen Beziehung zur Quadratur er bereits am 11. November 1675, wie aus der Lösung des In-

tegrals $\int \frac{a^2}{x} dx$ hervorging, erkannt zu haben schien. Am 26. Juni 1676*)

erkennt er, dass seine Differenzialrechnung die allgemeine Lösung des Tangentenproblems enthalte: „At vera methodus tangentium generalis est per differentias.“ Hingegen in Bezug auf die Quadratur spricht er sich ebenso aus wie am 22. November, nämlich dahin, das Problem mit Hülfe anderer Curven zu lösen, und deutet an, dass zu diesem Zwecke Tafeln oder Tabellen anzufertigen seien, (wie auch Newton einen „catalogus“ aufgestellt hatte, s. §. 3). Als besonders dienlich zur Anwendung zu diesem Zwecke hält er die Hyperbel und den Kreis; erstere wahrscheinlich deswegen, weil durch Mercator ihre Fläche bestimmt worden war. In einem vom Juli 1676 datirten Manuscript**) löst Leibniz das Beaune'sche Problem, indem er zu

dem Schlusse gelangt: „ $c \int \frac{dy}{y} = \frac{a}{f} \cdot z$; ergo $\frac{fc}{a} \int \frac{1}{y} = z$, quae est ad logarithmicam.“ Es ist schon oben erinnert worden, dass diese Lösung keine ganz genaue, sondern nur eine angedeutete ist. Auch kommt hier ein Fehler vor, indem er $d\sqrt{ay} = \frac{1}{\sqrt{ay}}$ setzt, ein Satz, der übrigens ohne allen Zusammenhang hingestellt wird.

Diess sind die Resultate, zu denen Leibniz während seines Aufenthalts in Paris gelangte. Im October 1676 reiste er von da ab, ging eine

*) Gerhardt: „Die Entd. d. Differenzialrechnung durch Leibniz.“ 1848, Beilage V.

**) Dasselbst. Beilage VI.

Woche nach London, wo er die persönliche Bekanntschaft von Collins machte*), und begab sich von da über Amsterdam nach Hannover. In einer auf dieser Reise geschriebenen**) Abhandlung vom November 1676***) stellt Leibniz die bisher gefundenen Resultate zusammen. Sie sind die Differenziation der Potenzen mit ganzen Exponenten. Wie er zu dieser Regel gelangt ist, spricht er nicht aus und ist aus dem Vorhergehenden auch nicht ersichtlich. Wahrscheinlich fand er durch Umkehrung der bereits am 29. October 1675 entwickelten und aufgestellten Sätze $\int x = \frac{x^2}{2}$ und $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$ die Beziehungen $d(x)^2 = 2x$ und $d(x^3) = 3x^2$, von denen er dann weiter auf die höheren Potenzen mit positiven und negativen Exponenten schloss. Es folgt dann die Regel für die Differenziation der Quadratwurzeln. Von dieser ist bereits erwähnt worden, dass er sie ohne Begründung und unrichtig in der Abhandlung vom 26. Juni 1676 hingestellt habe. Auch hier sind die angegebenen Sätze über dieselbe falsch, indem er zuerst $d\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sodann $d\sqrt{x}$ oder $d(x^{\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$ setzt, und $d\sqrt{a+bz+cz^2} = -\frac{b+2cz}{z \cdot dz\sqrt{a+bz+cz^2}}$ findet. Die früher beiläufig gefundene Regel der Differenziation eines Productes: $\overline{dxy} = y\overline{dx} + x\overline{dy}$ findet sich hier nicht, ebenso wenig wird der Werth von $\int \frac{dy}{y}$ mit unter die Fundamentalsätze aufgenommen, ein Beweis, wie es scheint, dass Leibniz auf diese beiden Theoreme damals noch keinen Werth legte, indem es ihm nur darauf ankam, eine Rechnung aufzustellen, die das allen damaligen Mathematikern unübersteigliche Hinderniss, welches die Brüche und Wurzeln der directen Behandlung in den Weg legten, beseitigte. Hierauf also, dass ihm dies, wenigstens bei der Differenziation gelungen, legte er das meiste Gewicht. Alle bisher erwähnten Abhandlungen machen übrigens noch den Eindruck, als ob Leibniz das Princip seines Verfahrens

*) Gerhardt: „Die Entd. d. Differenzialrechnung durch Leibniz.“ 1848. pag. 26.

**) Ebendasselbst.

***) Gerhardt: „Die Entd. d. höher. Analysis.“ 1855. Beil. IV.

mehr gefühlt, als deutlich erkannt habe, besonders dadurch, dass bald die eine, bald die andere der Veränderlichen, x und y als gleichmässig wachsend angenommen wird, und dass dies ohne Princip, oft im Widerspruche mit einer schon gemachten Supposition geschieht. Klarer ist ein Manuscript vom 11. Juli 1677 *) abgefasst. Hier treten zum ersten Male die Fundamentalsätze der Differenzialrechnung auf, indem Leibniz hier, oder vielmehr in einer Umarbeitung aus derselben Zeit die Regeln für die Differenziation einer Summe, Differenz, eines Productes und Quotienten, sowie der Potenzen und Wurzeln richtig aufstellt, ohne jedoch die Beweise hinzuzufügen. Wir können daher nur vermuthen, wie er auf diese Sätze gekommen ist. Zugleich aber, und dies ist sehr merkwürdig, giebt er jetzt die Annahme, die er in allen früheren Abhandlungen gemacht hat, dx und dy als Einheit anzusehen, stillschweigend auf, ohne sich hierüber zu erklären. Die Anwendung seiner Rechnung auf die Lösung des Tangentenproblems ist, wie es scheint, absichtlich etwas verwickelt dargestellt. Von bedeutenderem Interesse für die Begründung seiner Methode ist eine mit keinem Datum **) versehene Schrift Leibnizens. In derselben herrscht nun die Methode des Unendlichkleinen ganz unverhüllt und ausgebildet vor; indem hier dx , dy als „infinite parvae“, die Curve als ein „polygonum infinitangulum“ erklärt wird. Diese Theorie aber war es auch wahrscheinlich, die Leibniz auf die geometrische Bedeutung des Integrals führte, welche sich hier zum ersten Male klar und deutlich ausgesprochen findet, indem er $\int y dx$ als die Summe von Rechtecken aus den Seiten y und dx definiert. Besonders auffallend ist es aber, wie er hier die Elemente seiner Methode erläutert. Indem er nämlich auf die gegenseitige Beziehung zwischen Summe und Differenz hinweist, sagt er:

*) Gerhardt: „Die Entd. d. höh. Anal.“ 1855. Beilage V.

**) Dasselbst. Beilage VI. Vielleicht darf man aus einer in diesem Manuscripte vorkommenden Stelle: $\int x + y - v$ aequ. $\int x + \int y - \int v$, wo also Leibniz das Differenzial der Veränderlichen, nach der integrirt werden soll, nicht beifügt, schliessen, dass dasselbe vor dem Jahre 1686, in welchem er seine Integralrechnung veröffentlichte, abgefasst ist.

„Sit series differentiae	1	2	3	4	5	dx	
series ipsa	0	1	3	6	10	15	x
seriei summa	0	1	4	10	20	25	$\int x.$

Jam Termini seriei sunt summas differentiarum seu x aequ. $\int dx$, ita 3 aequ. $1+2$, et 6 aequ. $1+2+3$ etc.“ Man sieht, dass, wenn in der vorigen Abhandlung das gleichmässige Wachsen von x stillschweigend aufgegeben worden war, diese Stelle dem früheren Verfahren, x in einer arithmetischen Progression erster Ordnung wachsen zu lassen und dx constant anzunehmen, direct entgegen ist, indem hier x als in einer arithmetischen Progression zweiter, dx als in einer arithmetischen Progression erster Ordnung wachsend angenommen wird, so dass also die zweite Differenz constant sein würde. Auch ist diese Darstellung jedenfalls Ursache, warum Leibniz an der unmittelbar darauf folgenden Stelle: $\int x+y-v$ aequ.

$\int x + \int y - \int v$ das Differenzial unter dem Integralzeichen weglässt. Offenbar wusste er ihm keine Bedeutung unterzulegen. Nachdem diese Bemerkungen vorausgeschickt sind, entwickelt nun Leibniz die Fundamentalsätze seiner Rechnung, und zwar, hier zum ersten Male, mit Beweisen. Bei der Aufstellung derselben verfährt er, wie schon erwähnt wurde, nach der Methode des Unendlichkleinen, er vernachlässigt bei der Entwicklung von $d\overline{xy}$ das Glied $dx dy$, bei der von $d\left(\frac{y}{x}\right)$ das Glied $x dx$ im Nenner; im Werthe von $d\overline{xy}$ setzt er an die Stelle von x wieder ein Product zv , und indem er so fortfährt und zuletzt alle Factoren gleich setzt, gelangt er zur Differenziation der Potenz u. s. w. Der Logarithmus wird aber auch hier nicht erwähnt.

Dies ist der Entwicklungsgang der Leibnizischen Lehre, wie er sich aus seinen erst neuerdings herausgegebenen Manuscripten ergibt. Wir haben ihn bisher seine Methode an den wenigen Stellen, wo er auf das Princip derselben eingeht, im Sinne der Theorie des Unendlichkleinen begründen sehen. Betrachten wir jetzt die von ihm selbst veröffentlichten Abhandlungen. Die erste derselben, in welcher er seine Entdeckung be-

kannt machte, ist vom October des Jahres 1684 *). Es ist hier nicht der Ort zu untersuchen, was ihn bestimmte, so lange dieselbe geheim zu halten, und welcher Umstand ihn bestimmte, gerade im Jahre 1684 mit seiner Lehre nach neunjährigem Schweigen hervorzutreten **). Betrachten wir vielmehr die Art und Weise, wie er dieselbe in dem erwähnten Aufsätze vom October 1684 darstellt. In dieser Beziehung nun müssen wir sagen, dass derselbe durchaus nicht geeignet war, eine Einsicht in seine Methode zu gewähren, und es scheint allerdings, als ob Leibniz geflissentlich eine solche verhüten wolle. Was zunächst den Umfang betrifft, in welchem er seine Entdeckung mittheilte, so ist derselbe ein solcher, dass er alle Mathematiker der damaligen Zeit in Erstaunen setzen musste. Leibniz theilt zuerst die Regeln für die Differentiation einer Summe, einer Differenz, einer Productes, eines Quotienten, einer Potenz und Wurzel mit, jedoch ohne jeden Beweis, giebt hierauf die Gesetze für die Bestimmung der Tangente, der Maxima und Minima und der Flexionspunkte an und schliesst mit seiner im Juli 1676 gefundenen Lösung des Beaune'schen Problems. Sehen wir aber zu, wie er sich über die Bedeutung der Differenziale ausspricht. Dem Vorigen nach sollte man erwarten, dass er sich der Theorie des Unendlichkleinen gemäss über sie geäussert und dieselbe hier entwickelt habe. Dies ist aber keineswegs der Fall. Er rechnet überall mit denselben, wie mit allen anderen Grössen und fügt die einzige Bemerkung hinzu: „Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari ut y & dy vel aliam lineam indeterminatam cum sua differentiali“, und bei Gelegenheit der Regel, die er zur Lösung des Tangentenproblems aufstellt, sagt er, indem v die Ordinate, VB die Subtangente der Curve bedeutet, an die die Tangente gelegt werden soll: „Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx et recta quae sit ad dx ut v ad VB vocetur dv sive differentia ipsarum v .“ Das heisst also: man suche für die gegebene Curve den Differenzquotienten; derselbe geht, wenn die Differenzen sich annulliren, in das

*) „Acta Eruditorum.“ 1684. mens. Octobr. pag. 467: unter dem Titel: „Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.“ G. G. L.

**) Gerhardt: „Die Entd. d. höh. Anal.“ 1855. pag. 69 — 71 stellt Leibnizens Verhältniss zu Tschirnhaus als Grund dar.

Verhältniss der Ordinate zur Subtangente über; wird also an die Stelle der annullirten Differenz eine beliebige Grösse dx gesetzt und dann eine andere bestimmt, die sich zu ihr verhält, wie die Ordinate zur Subtangente, so wird diese durch dy bezeichnet. Freilich aber bezeichnete Leibniz die Differenzen sowohl vor ihrem Verschwinden, wo sie also Differenzen der Curvenordinaten sind, als nach ihrem Verschwinden, wo an die Stelle derselben andere Grössen treten, deren eine beliebig ist, und deren andere die zugehörige Differenz der Ordinate der Tangente ist, mit denselben Buchstaben, und sprach nur im Allgemeinen von Differenzen, indem er mit demselben Worte ebenso wie mit demselben Zeichen verschiedene Bedeutungen verband. Indem nun, wie erwähnt, dx beliebig ist, kann es constant angenommen werden, was, wie Leibniz am Ende seines Aufsatzes bei der Auflösung des Beaune'schen Problems angiebt, ein gleichmässiges Wachsen der Abscisse bedeutet. Von der Integralrechnung findet sich hier nur die Andeutung: „Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.“ Diese Erklärung über seine Integralrechnung, auf die Leibniz hier verweist, erfolgte im Jahre 1686 *). Hier nun treten die Differenziale dx , dy wiederum als unendlich kleine Grössen auf, sowie sie in dem zuletzt erwähnten Manuscripte behandelt worden sind; ein Grund, wesshalb Leibniz die 1684 aufgestellte Ansicht in Bezug auf dieselben verliess, findet sich nicht angegeben. Ausführlicher aber entwickelt er die Lehre des Unendlichkleinen in einer Abhandlung vom Jahre 1689**), die er gegen die philosophischen Ansichten, welche Newton's 1686 erschienenen Princ. phil. nat. zu Grunde liegen, abfasste***). Hier erklärt er geradezu, die Differenziale könnten so klein genommen werden, dass sie im Vergleich mit anderen Grössen vernachlässigt werden könnten, wie der Durchmesser der Erde im Verhältnisse mit dem Durchmesser des Himmels. Nach dem aus den Manuscripten vor dem Jahre 1684 Mitgetheilten wird es nicht wunderbar er-

*) „Acta Eruditorum.“ 1686.

**) „Acta Eruditorum.“ 1689. pag. 85 u. 86: „Tentamen de motuum coelestium causis.“ G. G. L.

***) Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 298 — 300; Raphson: „Historia fluxionum“; Brewster: The life of Sir Isaac Newton“. Chapter XII.

scheinen, dass Leibniz zu der hier ausgesprochenen Lehre gelangte; man wird aber auch nicht allzu weit von der Wahrheit entfernt sein, wenn man behauptet, dass seine hier gegebene Auffassung der Differenziale mit seinem philosophischen Systeme der Monaden, welches er ja um dieselbe Zeit ausbildete, in Beziehung stehe, dass ihm Differenzial und Monas nur verschiedene Ausdrücke für denselben Begriff sind; wissen wir doch, wie erwähnt, dass mit dieser Abhandlung ein philosophischer Streit Leibnizens mit Newton begann. Eine andere Frage aber ist die, wie es kam, dass seine Theorie des Unendlichkleinen, durch deren Aufstellung einer Reihe von Widersprüchen Thor und Thür geöffnet wurden, von den Mathematikern der damaligen Zeit ohne Weiteres und so begierig aufgenommen ward. Hierauf wird man ohne Bedenken antworten können: einmal weil es mehr im Geiste der damaligen Zeit lag, die Wissenschaft zu erweitern, als sicher zu begründen; zweitens aber und vorzüglich, weil die Vorstellung des Unendlichkleinen damals eine ziemlich geläufige war (wir erinnern nur an Roberval's und Cavalieri's Lehren des Untheilbaren); indem nun Leibniz einen Algorithmus gefunden hatte, mit dessen Hülfe man das Unendlichkleine im Calcul fixiren und in Rechnung bringen konnte, setzte man sich, im Hinblick auf die so erzielten glänzenden Resultate, über die mit dieser Vorstellung verknüpften Inconvenienzen leicht hinweg. Insbesondere trugen Jacob und Johann Bernoulli und der Marquis de l'Hospital (Marchio Hospitalis) durch glückliche Anwendung der Leibnizischen Methode auf die schwierigsten Probleme dazu bei, ihr rasch und schnell Eingang und Verbreitung zu verschaffen. Als sie aber erst einmal festen Fuss gefasst hatte, fand sie in der Leibnizisch-Wolfischen Philosophie eine natürliche Beschützerin, und ward durch diese aufrecht erhalten. Freilich aber gab es schon damals Männer, welche, wie der Leibniz so innig befreundete Huygens, der Methode der Alten getreu blieben, ohne jedoch gegen die neue Rechnung sich geradezu zu erklären. In diesem unangefochtenen Zustande sollte dieselbe aber nicht lange bleiben. Ein Holländer, Bernhard Nieuwentiit (oder Nieuwentijt), war der erste, der im Jahre 1695 gegen sie auftrat*) und somit die Reihe der Angreifer eröffnete, die sich bis auf

*) „Acta Eruditorum.“ 1695. pag. 272: „Considerationes circa calculi differentialis usum.“



unsere Tage gegen die Theorie des Unendlichkleinen erhoben haben. Mit sehr richtigem Takte, freilich, wie unten gezeigt werden wird, mit wenig Glück wandte er sich nicht gegen Leibniz allein, sondern auch gegen die Brüder Bernoulli, die hauptsächlichsten Verbreiter der Methode desselben. Sehen wir hier zunächst zu, was er gegen Leibniz selbst geltend machte. Es waren besonders drei Vorwürfe, die er ihm machte, nämlich: 1) Leibniz habe ebensowenig als Barrow und Newton, bei denen schon die unendlich kleinen Grössen vorkämen, erklären können, wie sie sich vom Nichts oder der Null unterschieden; 2) es sei nicht klar, wie sich die Differenziale höherer Ordnungen von denen der ersten Ordnung unterschieden; 3) die Differenzialmethode könne auf Exponentialfunctionen nicht angewandt werden. Leibniz vertheidigt sich hingegen folgendermassen*): Zuerst spricht er sich darüber, dass man überhaupt an einer Rechnung, deren Fruchtbarkeit sich bereits bewährt, Ausstellungen mache, dahin aus**): „Ego quidem fateor magni me eorum diligentiam facere, qui accurate omnia ad prima principia usque demonstrare contendunt, et in talibus quoque studium non raro posuisse; non tamen suadere, ut nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur, aut tali praetextu optime inventa rejiciamus, nosque ipsos eorum fructu privemus.“ Schon die hier ausgesprochenen Grundsätze lassen vermuthen, dass Leibniz sich ausser Stand gefühlt habe, die ihm gemachten Vorwürfe gründlich zu widerlegen; und dies bestätigt sich vollkommen. Auf den ersten Streitpunkt Nieuwentiit's antwortet er nämlich so***): „Et quae tali (es ist von unendlichkleinen Grössen die Rede) quantitate non differunt, aequalia esse statuo, quod etiam Archimedes sumsit aliquae post ipsum omnes. Et hoc ipsum est, quod dicitur differentiam esse quavis data minorem. Et Archimedeo quidem processu res semper deductione ad absurdum confirmari potest. Quoniam tamen methodus directa brevior est ad intelligendum, et utilior ad inveniendum, sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, quae sane et ipsa secum fert demonstrationem suam secundum

*) „Acta Eruditorum.“ 1695. pag. 310: „Responsio ad nonnullas difficultates a Dno Bernhardo Nieuwentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motus.“

**) In demselben Aufsatze, pag. 311.

***) Ebendasselbst.

lemma a me Febr. 1689 communicatum. Et si quis talem aequabilitatis definitionem rejicit, de nomine disputat. Sufficit enim intelligibilem esse et ad inveniendum utilem; cum ea quae alia magis (in speciem) rigorosa methodo inveniri possunt, hac methodo semper non minus accurate prodire sit necesse.“ Man sieht also, in Bezug auf den Unterschied, der zwischen dem Unendlichkleinen und dem Nichts oder der Null stattfinden soll, beruft sich Leibniz auf die Autorität des Archimedes. Indem er aber fortfährt, seine Beweismethode habe vor der deductio ad absurdum den Vorzug der Kürze und Nützlichkeit zum Erfinden, es liessen sich aber alle Sätze auch durch die deductio ad absurdum beweisen, gesteht er mehr als zur Hälfte zu, dass diese letztere eigentlich diejenige ist, auf die man sich am meisten verlassen kann; ob aber eine solche deductio ad absurdum immer möglich ist, darf billig bezweifelt werden; Maclaurin versuchte sie später (s. §. 4) und wir haben oben gesehen, mit welchem Erfolge. Auf den zweiten Einwurf antwortet er damit, dass er zu zeigen sucht, es bestehe zwischen d^2x und dx derselbe Unterschied wie zwischen dx und x , es sei also d^2x im Vergleich zu dx unendlich klein, ebenso wie dx im Vergleich zu x . Um dies zu beweisen nimmt er an, y wachse in einer arithmetischen, x in einer geometrischen Progression, so dass dy constant, dx aber nicht constant ist. Es verhält sich demnach dx zu dy , wie eine veränderliche Grösse, die er wieder mit x bezeichnet (und hierin liegt, wie man sogleich bemerken wird, der Nerv seines Beweises sowohl, als der Fehler, mit dem derselbe behaftet ist) zu einer Constanten, z. B. a . Es gilt also nach seiner Meinung dann die Proportion: $dx : dy = x : a$, woraus folgt: $dx = \frac{x \cdot dy}{a}$ und mithin, da a und dy constant sind: $d^2x = \frac{dx dy}{a}$; also verhält sich: $d^2x : dx = dy : a$; nun aber verhielt sich $dx : dy = x : a$ oder $dy : a = dx : x$, mithin ergibt sich die Proportion: $d^2x : dx = dx : x$, und somit hält Leibniz seine Meinung für bewiesen. Das Unzulängliche dieser Schlüsse ist jedoch zu augenfällig, als dass es nöthig wäre, länger dabei zu verweilen. Was endlich den dritten Einwand Nieuwentiit's betrifft, so ist schon früher angegeben worden, dass eine bestimmte Regel für die Differenziation der Exponentialfunction oder des Logarithmen von Leibniz nicht aufgestellt worden ist. Sehen wir daher zu, wie er sich hier ausspricht. Er sucht nicht das Differenzial der ein-

fachen Exponentialfunction, die bekanntlich in einer Potenz mit constanter Basis und variablem Exponenten besteht, sondern das einer Potenz $y = x^v$, in der sowohl die Basis x als der Exponent v veränderlich sind. Zuvörderst nun gesteht Leibniz, dass auf gewöhnlichem Wege die Auffindung des Differenzials nicht möglich sei, denn es folge aus $y = x^v$

$$dy = (x + dx)^{v+dv} - x^v$$

und, wenn man $(x + dx)^{v+dv}$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe verwandle, so dass also

$$dy = x^{v+dv} + \frac{v+dv}{1} x^{v+dv-1} \cdot dx + \dots - x^v$$

wird, und nun dx , dv , dy in Null übergehen lasse, erhalte man $0 = 0$, womit weiter nichts anzufangen sei. Um diesem Uebelstande zu entgehen, nimmt Leibniz von beiden Seiten der gegebenen Gleichung $y = x^v$ die natürlichen Logarithmen, so dass sie also, wenn dieselben durch l angedeutet werden, die Form annimmt:

$$l \cdot y = v \cdot l \cdot x$$

oder:
$$\int \frac{dy}{y} = v \int \frac{dx}{x}.$$

Werden beiderseits die Differenziale genommen, so erhält man:

$$\frac{dy}{y} = v \frac{dx}{x} + l \cdot x \cdot dv.$$

Indem nun Leibniz v als eine Function von x und y voraussetzt, wird $dv = m dx + n dy$, wo m und n ebenfalls gewisse in jedem einzelnen Falle zu bestimmende Functionen von x und y sind. Somit nimmt also die letzte Gleichung die Form an:

$$\frac{dy}{y} = v \frac{dx}{x} + m \cdot l x \cdot dx + n \cdot l x \cdot dy$$

oder:
$$\left(\frac{1}{y} - n \cdot l x \right) dy = \left(\frac{v}{x} + m \cdot l x \right) dx.$$

Offenbar ein Rechnungsfehler ist es, wenn Leibniz hieraus schliesst: $dx : dy$

$$= y : \frac{v}{x} + m \cdot l x, \text{ indem sich ergibt:}$$

$$dx : dy = \frac{1}{y} - n \cdot l x : \frac{v}{x} - m \cdot l x,$$

allein ebenso augenscheinlich begeht Leibniz hier einen Cirkel im Beweise,

indem er ohne Weiteres $\int \frac{dy}{y}$ für $l \cdot y$, $\int \frac{dx}{x}$ für $l \cdot x$ setzt. Denn da Lo-

garithmus und Exponentialfunction nur verschiedene Auffassungen derselben Sache sind, erhellt, dass er das eben zu Beweisende bereits als bekannt annimmt. Man sieht daher aus dem Bisherigen, dass Leibniz allerdings nicht im Stande war, die von ihm aufgestellten Regeln hinreichend zu beweisen und wir sehen ferner, dass er seine Differenzialrechnung gebrauchte, weniger weil er von der Sicherheit und Gewissheit der Methode überzeugt war, als weil er bemerkte, dass dieselbe fasslich (freilich nur bis zu einem gewissen Grade) und geeignet sei, um mit ihrer Hülfe Neues zu entdecken. Die hier angegebenen Beweise, vielleicht auch die ausgesprochenen Grundsätze mögen indessen Leibniz selbst nicht befriedigt und ihm selbst nicht hinreichend geschienen haben, denn in demselben Bande der Acta Eruditorum, bevor noch sein Gegner Etwas über seine Vertheidigung hätte sagen können, liess Leibniz eine zweite Abhandlung zur Begründung seiner Methode einrücken*). In derselben verweist er, während er in seinem ersten Aufsätze sich auf seine in den Act. Erud. in dem Jahre 1689 dargestellte Theorie sich bezogen hatte, auf — seine erste im Jahre 1684 aufgestellte Ansicht**): „Nempe inspiciatur Tab. ad pag. 467 dicti anni 1684, reperietur dx elementum abscissae AX vel x repraesentari per rectam assignabilem in figura separatim positam et deinde dy , elementum ordinatae XY seu y repraesentari per rectam, quae sit ad dictam dx jam inassignabilem ut XY ordinata est ad XD interceptam in axe inter tangentem et ordinatam.“ Wir sehen also, Leibniz flüchtet offenbar zu der im Jahre 1684 aufgestellten Theorie zurück, die Differenzen bis zu Null abnehmen zu lassen und wenn sie verschwinden, oder wie er sich hier ausdrückt, inassignabiles werden, andere endliche, assignabiles, Grössen an ihrer Stelle zu substituiren, deren eine, dx , willkürlich ist, und die er in der That in der Figur zu seiner Abhandlung vom Jahre 1684 als eine endliche Linie dabei gezeichnet hatte, während die andere, dy , dadurch bestimmt wird, dass sie sich zu dx verhalten muss wie die Ordinate zur Subtangente. Sehr bezeichnend bedient sich Leibniz in der eben angeführten Stelle des Wortes „repraesentare“, indem die neuen, assignabilen

*) „Acta Eruditorum.“ 1695. pag. 369: „Addenda ad Dn. G. G. L. Schediasma proximo mense Julio pag. 310 et sequ. insertum.“

**) Dasselbst. pag. 370.

Größen die ursprünglichen, wenn sie inassignabel werden, vertreten. Ueber die höheren Differenzialquotienten drückt er sich hier so aus*): . . . „poterunt ad eundem axem in iisdem punctis applicari ordinatae secundae ad novam lineam terminatae, proportionales differentiis primi gradus seu elementis ordinatarum lineae primae. Quod si jam idem fiat pro secundis ordinatis, quod factum est pro primis, habebuntur ordinatae ad lineam tertiam, proportionales primarum ordinatarum differentio-differentialibus, seu differentiis secundis.“ Wie es scheint, meint Leibniz hiermit, dass der Werth eines jeden Differenzialquotienten als Ordinatengleichung einer Curve angesehen und dieselbe stets construirt werden könne, sowie Newton die höheren Fluxionen geometrisch dargestellt hatte. Möglicher Weise meint er aber auch dasselbe, was er kurz darauf ausführlicher so ausdrückt**): „Quod si solae darentur differentiae primae, sequeretur omnes ordinatas crescere uniformiter, seu omnem lineam esse rectam. Interdum autem continuando aliquousque differentiationes, tandem finiendum est, cum nimirum linea differentiarum repraesentatrix, secunda vel tertia vel alia ulterior, fit recta. Nempe si ordinatae primae sint ut abscissae, tunc linea prima est recta, & caret differentiis secundis. Si ordinatae primae sint ad parabolam (nempe quadraticam) seu si sint ut quadrata abscissarum, tunc linea secunda erit recta, et linea prima (parabola scilicet) carebit differentiis tertiis. Si ordinatae primae sint ad paraboloidem cubicam, seu sint ut cubi abscissarum, tunc linea tertia erit recta, et linea prima (paraboloeides scilicet cubica) carebit differentiis quartis & ita porro. Idem est si ordinatae (primae scilicet) componantur ex ordinatis paraboloeidum dictis, sive per additionem sive per subtractionem, tuuc enim finientur tandem differentiae cum altissimae paraboloeidis ingredientibus ordinatis. Sed in caeteris lineis omnibus differentiationes procedunt in infinitum, quoties scilicet in valore ordinatae abscissa in nominatore vel vinculo reperitur. (Und offenbar mit Bezug auf seine obige Erklärung der Differentiale fährt er fort): Ex his jam intelligitur calculum differentialem posse concipi, tanquam si fieri non nisi in quantitibus ordinariis; tametsi origo ex inassignabilibus petenda sit, ut abjectionum seu destructionum ratio reddatur.“ Dieselbe Ansicht entwickelt Leibniz ausführlicher noch in einer besonderen, neuerdings

*) Ebendasselbst.

**) Ebendasselbst.

herausgegebenen Schrift*), die erweislich**) nach dem Jahre 1700 abgefasst ist. In derselben spricht sich Leibniz nur noch deutlicher und bestimmter aus als in der letztgenannten Stelle der Acta Erud. Er sagt daselbst***): „Mihi aliquoties propositum fuit, demonstrationibus firmare calculi nostri fundamenta, et subinde jam tum indicavi fontes eo consilio, ut cui otium sit, occupare hanc operam possit. Nondum tamen vidi, qui fecerit. Nam quod doctissimus Hermannus coepit agere in scripto contra Dn. Nieuwenhütium pro me edito, absolutum nondum est.“ Hier also gesteht Leibniz offen ein, dass bis jetzt seine Rechnung noch nicht begründet sei, er gesteht also ein, dass seine Methode des Unendlichkleinen keinen hinlänglichen Beweis enthalte und es ist wohl zwischen den Zeilen zu lesen, dass er die vorliegende Abhandlung zum Behufe einer Begründung der von ihm aufgestellten Regeln aufgesetzt habe. Wie erwähnt, führt er hier das länger als 26 Jahre vorher, im Jahre 1684 Angedeutete und im Jahre 1695 Wiederholte weiter aus. An die Stelle der Differenzen dx , dy , wenn sie quantitates inassignabiles werden, also im Verschwindungszustande sind, denke man sich andere, endliche Grössen, quantitates assignabiles gesetzt, die er hier mit $(d)x$, $(d)y$ bezeichnet: „Assumatur pro arbitrio“ sind seine Worte†) recta quaecunque $(d)x$ (Fig. 34) manente puncto ${}_1X$, et puncto ${}_2X$ ipsi utcunque accedente, semper permanens, et fiat alia $(d)y$, quae sit ad ipsam $(d)x$ ut y ad ${}_1XT$ seu ut dy ad dx eruntque semper $(d)x$, $(d)y$ rectae ordinariae seu assignabiles“; und††): „Licet autem quantitatibus assignabilibus $(d)y$, $(d)v$, $(d)z$, $(d)x$ etc. possimus esse contenti, cum ita fructum omnem calculi nostri percipiamus, nempe constructionem per quantitates assignabiles, patet tamen hinc fingendo saltem pro illis posse substitui inassignabiles dx , dy per modum fictionis†††) etiam in casu

*) „Historia et origo calculi differentialis a G. G. Leibnitio conscripta.“ Herausgegeben von Dr. Gerhardt. Hannover. 1846. pag. 39 — 50.

**) Da in dieser Abhandlung pag. 40 eine Schrift eines damaligen Baseler Mathematikers, Hermann, erwähnt wird, die, wie man aus den „Actis Eruditorum“ 1701. pag. 28 erfährt, im Jahre 1700 erschienen ist, so ist ersichtlich, dass dieser Aufsatz Leibnizens nach dem Jahre 1700 entworfen ist.

***) „Historia et origo etc.“ pag. 40.

†) Ebendasselbst, pag. 46.

††) Daselbst, pag. 46.

†††) Eine Stelle, wie diese, muss Maclaurin im Sinne gehabt haben, als

quo evanescunt, quia $dy : dx$ reduci potest semper ad $(d)y : (d)x$ rationem inter quantitates assignabiles sine dubio reales.“ Hiermit also hatte Leibniz eine Methode angegeben, wie die von ihm aufgestellten Sätze bewiesen werden können, und man wird wohl, da dies die letzte bekannte Abhandlung ist, die er über diesen Gegenstand verfasste, annehmen können, dass er diese Ansicht bis zu seinem Tode beibehalten habe. Sei es aber, dass die im Jahre 1695 in den Actis Eruditorum befindliche Stelle nicht bemerkt ward, oder sei es, dass sie, wie die erste Veröffentlichung Leibnizens im Jahre 1684, nicht verstanden ward, oder endlich sei es, dass die Theorie des Unendlichkleinen dem damaligen Zustande der Wissenschaft mehr zusagte und zu fest gewurzelt war; genug die letztere behielt, insbesondere während der Blüthezeit der Leibnizisch-Wolfischen Philosophie, die Oberhand, und die Stimmen, die sich gegen sie geltend machten, verklangen, freilich wohl vorzüglich aus dem Grunde, weil lange Zeit Niemand etwas Besseres an ihre Stelle zu setzen vermochte; denn Leibnizens zweite Theorie der Substitution assignabler Grössen scheint sehr früh in gänzliche Vergessenheit gerathen zu sein*).

Nachdem im Vorigen die Art und Weise, wie Leibniz zur Aufstellung seiner Differenzialrechnung gelangte, entwickelt ist, mögen nur einige Bemerkungen über den bekannten Streit mit Newton folgen. Ueber denselben ist bereits viel gesprochen und hinüber und herüber debattirt worden, immer aber ist der eigentliche strittige Punkt, wie es scheint, noch nicht klar und präcis genug hervorgehoben worden. Die einen fragen, wer der erste Erfinder der Differenzialrechnung, die anderen, wer der Entdecker der höheren Analysis sei, noch andere, wer zuerst den Algorithmus der höheren Analysis aufgestellt habe u. s. w. Dass, je nachdem der eine diese, der andere jene Frage berücksichtigte, die Antworten verschieden ausfielen, kann nicht verwundern. Wenn wir nun unter höherer Analysis die Methode verstehen, mittelst deren stetige Gesetze der Rechnung unterworfen werden, sie mögen auf dem Gebiete der Geometrie, z. B. an stetig gekrümm-

er Leibniz vorwarf, er habe seine Differenziale für blosse Fictionen erklärt (s. §. 4). Dass er diese Abhandlung gekannt habe, ist wohl nicht wahrscheinlich.

*) Erst neuerdings ist diese Methode von Snell in seiner „Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung zur Begründung der Fundamentalsätze der höheren Analysis consequent angewendet worden.

ten Linien oder Curven u. s. w., oder auf dem Gebiete der Mechanik, z. B. bei der beschleunigten oder verzögerten Geschwindigkeit u. s. w. auftreten, die Methode also, deren Grundprincip der Begriff der Function und der Veränderlichkeit ist; so müssen wir ohne Zweifel Newton zugestehen, dass er früher als Leibniz eine Methode aufstellte (denn die Abfassung seiner „Methodus fluxionum“ fällt in das Jahr 1671), welche, wenn auch nicht in allen Fällen direct, so doch mittelst der unendlichen Reihen bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit alle Aufgaben der genannten Art löste. Ebenso aber ist zuzugeben, dass Leibniz eine andere Methode aufstellte, zwar später als Newton, aber eine Methode, welche die des letzteren in vielen Dingen an Vollkommenheit übertraf und endlich ganz verdrängte. Hierüber also kann ein Streit nicht obwalten, ebensowenig darüber, dass Newton sowohl als Leibniz jeder für sein Verfahren einen eigenthümlichen Algorithmus erfanden. Denn dass Leibniz den seinigen nicht von Newton entlehnte, sondern durch einen ganz naturgemässen Gedankengang auf denselben hingeletet wurde, wird aus dem Obigen ersichtlich sein. Wir müssen also sagen: Sowohl die von Newton aufgestellte Fluxions-, als die von Leibniz erfundene Differenzialrechnung sind zur höheren Analysis zu rechnen. Ersterer stellte sein Verfahren auf, das des letzteren aber war das vollkommnere. Eine weitere Frage ist aber offenbar die, ob Leibniz, als der Urheber der später entdeckten Methode, nicht durch das von Newton angegebene Verfahren in der Aufstellung der Fundamentalsätze gefördert worden sei. Diese Frage ist neuerdings dahin entschieden worden*), „dass Leibniz ohne alle fremden Winke, lediglich mit Hülfe seines neuen Algorithmus die Fundamentalsätze der höheren Analysis (d. h. der Differenzialrechnung) gefunden habe.“ Als Beweis hierfür werden seine der obigen Darstellung zu Grunde gelegten Manuscripte angeführt; deren frühestes, in welchem offenbare Spuren der Differenzial- und Integralrechnung sich finden, vom 29. October 1675 ist. Wir untersuchen zunächst die Möglichkeit, ob Leibniz damals von Newton's Fluxionsrechnung etwas wissen konnte. Dass Newton seinem Lehrer Isaac Barrow seine Abhandlung: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ bereits im Jahre 1669 mitgetheilt **)

*) Gerhardt: „Die Entdeckung der höheren Analysis.“ 1855. pag. 62.

**) Brewster: „The life of Sir Isaac Newton.“ London. 1831. und

und dass auch Collins bei Leibnizens Anwesenheit in London im Jahre 1673 von Newton's Methode Kenntniss hatte, ist nicht zu bezweifeln*). Weiter aber geht Buffon, indem er erzählt**): „De plus en 1672 Newton dans une Lettre écrite à Collins, lui envoie un exemple de sa Méthode des Tangentes, comme un Corollaire, dit-il, d'une Méthode générale, qu'aucune complication de Calcul n'arrête, et qui s'étend non seulement aux Courbes Géométriques, mais même aux Courbes Mécaniques, et qui outre la solution complète de la question des Tangentes, donne encore celle de plusieurs Problèmes beaucoup plus difficiles comme des Courbures des Courbes, de leurs Aires, de leurs longueurs, de leurs Centre de gravité. „J'ai“, dit-il, „joint cette Méthode à une autre qui donne la résolution des Equations par des suites infinies etc.“ On voit bien, que ces deux Méthodes sont la Méthode directe et inverse des Fluxions, et celle des Suites Infinies telles qu'elles sont dans ce Traité fait en 1671. Tschirnhaus au mois de Mai 1675, Leibnitz au mois de Juin 1676 et Slusius dès le 29 Janvier 1673 avaient reçu des copies de cette Lettre, c'étoit même à l'occasion de la Méthode des Tangentes de Slusius, que Newton l'avoit écrite, il loue beaucoup l'invention de Slusius, qui en effet avoit trouvé sa Méthode avant que d'avoir vû celle de Newton, et il l'avoit envoyée le 17 Janvier 1673 à Oldembourg.“ Eine Beweisstelle für diese Behauptung wird nicht angeführt. Immerhin aber bleibt es möglich, dass Tschirnhaus, der ja im Jahre 1675 in London war und daselbst die Bekanntschaft von Wallis, Newton, Collins, Oldenburg machte***), allerdings

„Commercium epistolicum Joh. Collinsii et aliorum de analysi promota, jussu societatis regiae in lucem editum.“ Londini 1712.

*) „Commercium epistolicum etc.“; I. Newtoni: Enumeratio linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusdem tractatus auctore Jacobo Stirling.“ Parisiis 1797. pag. 45 u. a. O.

**) Préface zu seiner Uebersetzung von Newton's Methodus fluxionum pag. XV. Diese Vorrede, die Montucla in seiner „Histoire des mathématiques“ Tome II. pag. 364, gewiss mit Schonung eine: „Préface très curieuse“ nennt, trägt den Charakter der Leidenschaftlichkeit und Gehässigkeit in hohem Grade an sich. Jedenfalls ist der Werth, der in der angeführten Stelle auf Newton's Tangentenmethode gelegt wird, gerade einer der schwächsten Punkte seiner Methode (vergl. §. 3.), übertrieben.

***) Gerhardt: Die Entd. d. höh. Anal. 1855. pag. 68.

etwas von Newton's Lehre erfahren habe. Indem derselbe nun im September desselben Jahres 1675 sich nach Paris begab, wo er mit Leibniz, dem er Briefe von Oldenburg mitbrachte*), so befreundet wurde, dass sie zusammen arbeiteten**), so ist es mindestens denkbar, dass Leibniz, wenn auch nicht direct von Newton oder Collins, doch auf dem genannten Wege von der Fluxionstheorie gehört habe. Sehen wir nun zu, ob sich in Leibnizens Manuscripten aus dieser Zeit etwas findet, was darauf hinzudeuten scheint, dass dem wirklich so gewesen sei. Eine solche Stelle scheint nun allerdings in dem vom 11. November 1675 datirten Aufsatze Leibnizens vorzuliegen. Wie oben erwähnt wurde, nahm er nämlich x als in einer arithmetischen Progression (erster Ordnung) wachsend an. An dieser Stelle***) nun erklärt er sich hierüber so: „ x esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB esse uniformem. Descriptiones autem, quae supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi continue interruptum.“ Jeder, der diese Stelle unbefangen liest, wird durch dieselbe ganz unwillkürlich an Newton's oder Barrow's Fluxionsmethode erinnert. Die hier gegebene Erläuterung des gleichmässigen Wachsens der Abscisse, verbunden mit der in gar keinem Zusammenhange mit dem Vorigen und dem Folgenden stehenden philosophischen Bemerkung über die Unmöglichkeit eines solchen Wachstums, erregen fast die Vermuthung, als habe Leibniz einmal eine Stütze für die Zulässigkeit seiner Vorschrift, x als in einer arithmetischen Progression wachsend anzusehen, darin gefunden, dass in der Fluxionsrechnung dasselbe aus anderen Gründen gethan werde, als habe er aber zugleich die Gründe, die die Fluxionsrechnung hierfür anführt, verworfen und seine arithmetische Auffassung und Erklärung derselben Regel als vorzuziehen hinstellen wollen. Wir wissen nun ferner, dass Newton im Jahre 1676 mit Leibniz mehrere Briefe wechselte, indem er ihm am 13. Juni dieses Jahres Mittheilungen machte†),

*) Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 168.

**) Gerhardt: „Die Entd. d. höh. Anal.“ 1855. pag. 69.

***) Daselbst. Beilage III. pag. 137.

†) Buffon in der Préface pag. XVIII seiner Uebersetzung erzählt, Newton habe unter diesem Datum Leibniz den binomischen Satz mitgetheilt. (Dies ist

worauf Leibniz am 27. August 1676 antwortete*), und Newton theilte dann Leibniz in einem Briefe vom 24. October 1676**), der Leibniz mit- hin kurz vor oder schon auf der Reise über London, Amsterdam nach Han- nover antraf, das Princip seiner Methode mit in den Worten: „Data aequa- tione quotcunque fluxiones (?) involvente, fluxiones invenire et vice versa“, deren Buchstaben aber umgestellt waren, so dass der Sinn nur errathen werden konnte. Den einen dieser beiden Briefe meint auch offenbar New- ton, indem er in der Einleitung zu seiner Optik erzählt***): „In a letter written to Mr. Leibnitz in the Year 1676 and published by Dr. Wallis, I mentioned a Method by which I had found some general Theorems about squaring Curvilinear Figures, or comparing them with the Conic Sections, or other the simplest Figures with which they may be compared. And some Years ago I lent out a Manuscript containing such Theorems, and having since met with some Things copied out of it, I have on this Oc- casion (bei Gelegenheit der Herausgabe seiner Optik) made it publick, pre- fixing to it an Introduction and subjoyning a Scholium concerning that Method. And I have joined with it another small Tract concerning the

wahrscheinlich auch der Thatbestand, der Buffon's oben ausgesprochener Be- schuldigung, Leibniz habe im Juni 1676 eine Copie von Newton's Brief an Collins genommen, zu Grunde liegt). Guhrauer in seiner Biographie Th. 1. pag. 175, setzt das Datum dieses Briefes, den er als eigentlich an Oldenburg gerichtet angiebt, auf den 23. Juni 1676 und nennt als Inhalt ebenfalls den binomischen Satz und seine (Newton's) Resultate über die Reihen, jedoch ohne Demonstration. Der Brief vom 13. Juni 1676, dessen Newton in sei- nem Schreiben an Conti gedenkt (Gerhardt: Die Entd. d. höh. Anal. 1855. pag. 92) ist wahrscheinlich der in Rede stehende.

*) Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 174, und Anmerkungen zum ersten Buche pag. 22. Auf pag. 296 ist wahrscheinlich durch einen Irrthum der 24. August angegeben.

**) I. Newton: „Principia philosophiae naturalis.“ Lib. II. Sect. II. Scho- lium. Editio prima pag. 256. und Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 295.

***) Opticks, or a treatise of the reflexions, refractions, inflections and colours of light. Also two treatises of the species and magnitude of curvi- linear figures. London. 1704. Advertisement. Dieses Werk erschien übri- gens anonym, nur unter dem Advertisement ist durch die Buchstaben I. N. der Verfasser angedeutet.

Curvilinear Figures of the Second Kind, which was also written many Years ago, and made known to some Friends, who have solicited the making it publick. I. N.“ Man sieht, Newton beschwert sich darüber, dass an seiner Methode der Quadratur ein Plagiat begangen sei, drückt sich aber nicht bestimmt aus, ob von Leibniz, dem er sie 1676, oder von einigen Freunden, denen er sie einige Jahre vor 1704 mitgetheilt habe; diese Methode war aber, wie in §. 3. gezeigt worden ist, die, eine gesuchte Fläche mit einer bekannten zu vergleichen. Nun ist bereits oben erwähnt worden, dass Leibniz zwar bereits am 22. November 1675 den Gedanken ausspricht, eine Curve mit Hülfe einer anderen zu quadriren. Allein er deutet es auch nur eben an: „Hoc enim serviet ad figurarum quadraturas ex se invicem ducendas, sed exemplo opus, ut talia clarius intelligantur. Est enim res subtilissimae intricationis.“ Am 26. Juni 1676 deutet er bereits das Entwerfen von Tafeln an, ein Mittel, dessen sich Newton auch bediente, indem er eine Tafel aller Curven, die sich mit Hülfe der Kegelschnitte quadriren lassen, aufstellte und empfiehlt besonders den Kreis und die Hyperbel als Hülfscurven. Indem nun Newton angiebt, diese seine Methode habe er Leibniz in einem Briefe vom 13. Juni desselben Jahres, wenn auch nicht erklärt, so doch angedeutet (mentioned), so scheint es allerdings nicht unmöglich, dass Leibniz hierdurch in einer Sache, die er als eine „res subtilissimae intricationis“ am 22. November des Jahres vorher verlassen hat, soweit gefördert wurde, dass er auf den Gedanken gerieth, Tafeln zu entwerfen. Wahrscheinlich will nun Leibniz von dieser Methode in dem Manuscripte vom Juli 1676, welches die Ueberschrift: „Methodus tangentium inversa“ trägt, ein Beispiel geben; es ist die Lösung des Beaune'schen Problems, welches er auf die Aufsuchung des Integrals $\int \frac{dy}{y}$ zurückbringt, also auf die Quadratur der Hyperbel, die er am 26. Juni als Hülfscurve empfohlen hat. Hierin ist nun allerdings wenig Aehnlichkeit mit Newton's Verfahren zu erkennen. Um so merkwürdiger aber ist eine Stelle in der Abhandlung vom November 1676*). Dasselbst nämlich legt er sich, um seine Tangentenmethode mit der von de Sluze zu vergleichen, die Gleichung vor: $ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0$, setzt hierin $x + dx$,

*) Gerhardt: Die Entd. d. höh. Analysis. 1855. Beilage IV. pag. 141.

$y + dy$ für x und y u. s. w. In einer Anmerkung aber fügt er hinzu: „Alterutra ex his $\overline{dx}$ vel $\overline{dy}$ pro arbitrio explicari potest, adhibita aequatione nova, et alterutra harum $\overline{dx}$ vel $\overline{dy}$ sublata et x scilicet vel y aliter per quantitates explicanda. Verum non puto id esse, quia catalogus omnium curvarum quadrabilium prodire debet alterutram sumendo constantem.“ Wenn man nun bedenkt, dass die vorgelegte Gleichung in der That die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist, so wird man sich hier kaum des Gedankens erwehren können, Leibniz habe auf Newton's „Catalogus curvarum ad conicas sectiones relatarum“ hingedeutet. Die Möglichkeit wenigstens ist vorhanden. Wenn wir nun ferner wissen*), dass Leibniz auf den am 24. October 1676 geschriebenen Brief Newton's am 21. Juni 1677 antwortete, dass aber damit der Briefwechsel zwischen beiden vollständig aufhörte, also das Schreiben vom 24. October die letzte directe Mittheilung Newton's an Leibniz war, wenn wir ferner bedenken, dass auch Oldenburg, der bisher fast stets der Vermittler beider gewesen war, im Jahre 1677 starb**), so muss eine Stelle in dem letzten der früher erwähnten Manuscripte***) Leibnizens, dessen Entstehung wir aus den oben angeführten Gründen vor das Jahr 1686, also vor das Erscheinen von Newton's Princ. phil. nat. gesetzt haben, auffällig sein. Dasselbst heisst es nämlich: „Si jam ponuntur ipsae istae dx et dy infinite parvae, seu quando puncta curvae distantiam habere intelliguntur quavis data minorem, id est si (Fig. 35) istae ${}_1D_2C$, ${}_2D_3C$ †) etc. considerentur ut incrementa momentanea lineae BC inter descendendum per AB continue crescentis, tunc patet etc.“ Man sieht, dass sich Leibniz hier einer offenbar der Fluxionsmethode angehörigen Vorstellung, des „descendere lineae BC per AB “ und des „continue crescere“ (das Newton'sche „fluere“), ja sogar eines Ausdrucks bedient, der nicht

*) Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 177 u. 286.

**) Gerhardt: „Historia et origo calculi differentialis a. G. G. Leibnitio conscripta. pag. 27.

***) Dasselbst. pag. 33. und Gerhardt's „Entd. d. höh. Analysis. 1855. Beilage VI. pag. 149.

†) In der letztgenannten der beiden Schriften Gerhardt's, in denen dieses Manuscript abgedruckt ist, steht, jedenfalls durch ein Versehen, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$ statt ${}_1D_2C$, ${}_2D_3C$.

allein mit dem ganz dasselbe bedeutenden Ausdrücke Newton's: „momentum“ die grösste Aehnlichkeit hat, sondern der sogar von demselben, wenn auch nur an wenigen Stellen*), selbst angewendet worden ist. Wenden wir uns nun von seinen Manuscripten zu den von ihm selbst veröffentlichten Aufsätzen, so müssen wir zunächst gleich den ersten erwähnen, in dem er seine Differenzialmethode bekannt machte. Auch hier**) nämlich heisst es: „Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx , dy , dv , dw , dz , ut ipsarum x , y , v , w , z (cujusque in sua serie), differentiis seu incrementis momentaneis proportionales haberi posse.“ Wir begegnen also auch hier einem Ausdrücke, dessen sich Newton bediente. Dazu kommt aber noch Folgendes: Es ist bereits oben darauf aufmerksam gemacht worden, dass Leibniz in seinen Manuscripten, wo er auf den Beweis seiner Sätze etwas eingeht, denselben als im Sinne der Methode des Unendlichkleinen zu führen andeutet, dass er aber in dieser Abhandlung, ohne sich auch nur im Mindesten darüber auszusprechen, warum, dieselbe gänzlich verlässt und, wie es fast scheint, absichtlich sogar das Wort „unendlich klein“ vermeidet, denn in der ganzen langen Abhandlung findet es sich nur an einer einzigen minder wichtigen Stelle***): . . . „curvae puncta distantiam infinite parvam habentia seu latus polygoni infinitanguli, quod nobis curvae aequivalet.“ Untersuchen wir nun die hier gegebene oder angedeutete Begründung seiner Rechnung. Wie erwähnt wurde, findet sich dieselbe in den Worten†): „Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx et recta quae sit ad dx ut v (die Ordinate) ad VB (die Subtangente) vocetur dv sive differentia ipsarum v .“ Das Princip, welches er hier als zu Grunde liegend bezeichnet, ist also, an die Stelle der Differenzen, wenn sie verschwinden, endliche Grössen zu setzen, deren eine, dx , beliebig ist, deren andere, dy , durch die Proportion $dy : dx = y : subtang.$ bestimmt

*) Newton: „Princ. phil. nat.“ Lib. II. Sect. II. Lemma II. Edit. prim. pag. 251. und sein „Tractatus de quadratura curvarum.“ Prop. I. Probl. I. Demonstratio. Am letztgenannten Orte werden die „momenta“ bezeichnet durch „incrementa momentanea synchrona.“

**) „Acta Eruditorum.“ 1684. pag. 469.

***) Dasselbst. pag. 470.

†) Dasselbst. pag. 467.

wird. Dass aber Leibniz mit den angegebenen Worten den angegebenen Sinn wirklich verbunden habe, bestätigt er selbst, indem er in der nach dem Jahre 1700 verfassten Abhandlung (s. o.), wo er dieselbe Ansicht ausführlicher erläutert, auf diese im Jahre 1684 bekannt gemachte Abhandlung verweist*), sowie er es bereits in dem zweiten gegen Nieuwentiit gerichteten Aufsätze gethan hatte**) (s. o.). Betrachten wir nun dieses Princip, welches so plötzlich und unerwartet in Leibnizens erster Veröffentlichung seiner Entdeckung als Nerv des Beweises auftritt, so kann es uns nicht entgehen, dass es ganz dasselbe ist, welches Newton seiner Fluxionsrechnung zu Grunde gelegt hatte. Es ist oben beschrieben worden (s. §. 3), dass derselbe die Veränderlichen oder Fluenten zunehmen liess und an die Stelle der Incremente im Momente des Verschwindens die Fluxion setzte. Ganz dasselbe thut hier Leibniz, er setzt auch an die Stelle der Differenzen, wenn sie sich annulliren, andere, endliche Grössen. Der einzige Unterschied, der aber hier kaum in Betracht kommen kann, ist der, dass Newton den substituirten Werthen eine phoronomische Bedeutung, die der Geschwindigkeit, beilegte, während Leibniz dies nicht that; dass Newton die incrementa momentanea von den Fluxionen durch die Schreibweise unterschied, indem er die einen durch $\dot{x}0$, $\dot{y}0$, die anderen durch $\dot{x}$, $\dot{y}$ bezeichnete, während Leibniz dx , dy für beides brauchte, und erst in seiner letzten nach 1700 verfassten Abhandlung***) die substituirten Grössen durch $(d)x$, $(d)y$ bezeichnete. Nehmen wir noch hinzu Leibnizens offenes Schwanken in seiner Ansicht, wie er sich zuerst, in den Manuscripten, zur Theorie des Unendlichkleinen hinneigt, wie er aus geheimnissvollen Gründen ganz unerwartet im Jahre 1684 eine andere Methode zu Grunde legt, um sie ebenso schnell und aus ebenso geheimen Ursachen, wie er sie aufgestellt, zu verlassen, und die frühere Theorie des Unendlichkleinen auf den höchsten Grad der Ausbildung zu bringen, wie er diese im Jahre 1695 wieder verwirft und zu der im Jahre 1684 veröffentlichten Ansicht zurückkehrt, berücksichtigen wir alles dieses, so werden wir bei einer unbefangenen Beurtheilung uns wohl dahin entscheiden dürfen, dass

*) „Historia et origo etc.“ pag. 45.

**) „Acta Eruditorum“. 1695. pag. 370.

***) „Historia et origo etc.“ pag. 39 — 50.

sowohl die Möglichkeit als auch ein gewisser Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden sei, Leibniz sei bei der Ausbildung seiner Methode durch die Kenntniss von Newton's Fluxionsrechnung, mochte er sie durch Tschirnhaus, aus Newton's Briefen oder sonst woher, denn der Möglichkeiten bleiben ja ausserdem viele, kennen gelernt haben, unterstützt worden. Ja noch mehr; es ist bekannt, dass Leibnizens erste Veröffentlichung 1684 in den Act. Erud. fast allgemein unverständlich blieb; und in der That, das kann nach dem Früheren nicht wunderbar erscheinen. Am verständlichsten aber war sie jedenfalls für die, welche Newton's Fluxionsrechnung kannten, denn sie fanden hier die „incrementa momentanea“, sie fanden ferner den ihnen bekannten Grundsatz, an die Stelle verschwindender Grössen andere zu substituiren. Kann es da Wunder nehmen, wenn sie hier die Fluxionsrechnung nur mit veränderter Bezeichnung wieder erblickten? Hätten sie vollends die letzte Abhandlung*), in der $(d)x$, $(d)y$ gebraucht werden, kennen gelernt, so würden sie in ihrer Ansicht nur noch bestätigt worden sein. Man kann es daher der Londoner Societät nicht verargen, wenn sie bei der Herausgabe des Commercium epistolicum von der Meinung ausging, Fluxions- und Differenzialrechnung sei identisch.“**) Während nun schon die Frage, wie weit sich der Einfluss der Kenntniss von Newton's Methode bei Leibniz erstreckt habe, für jetzt wenigstens unbeantwortet bleiben muss, und auch mit völliger Genauigkeit wegen der Menge der vorliegenden Möglichkeiten nie entschieden werden wird, kann die Frage, in wie weit diese Kenntniss Leibniz gefördert habe, mit juristischer oder mathematischer Sicherheit auf keinen Fall beantwortet werden, denn dem schaffenden menschlichen Geiste, besonders wenn er sich bereits auf dem Wege zu einer Entdeckung befindet, genügt ja oft ein Wort, eine leise Andeutung, um zu den wichtigsten Resultaten geführt zu werden. Man wird daher nur das mit völliger Sicherheit aussprechen können, und jeder Unbefangene wird es anerkennen, dass Leibniz seinen Algorithmus, auf den ja damals Alles ankam, durchaus selbstständig und unabhängig erfand und der höheren Analysis so die Gestalt verlieh, die

*) „Historia et origo etc.“ pag. 39 — 50.

**) Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 314.

sie befähigte, so Grosses zu leisten, wie wir es im Laufe von anderthalb Jahrhunderten gesehen haben.

Jedenfalls aber beging Leibniz einen nicht zu entschuldigenden Fehler, dass er seine Methode, auf deren Erfindung die ganze damalige Zeit hindrängte, deren Principien bereits vorhanden waren und der nur die Form fehlte, um das, was Jedermann ahnte und fühlte, zur Klarheit zu bringen, so lange geheim hielt. Hätte er nur seine Entdeckung, wie Newton es that, einigen Freunden mitgetheilt, um sich nachher auf sie berufen zu können! Allerdings wissen wir, dass Huygens und Tschirnhaus von seiner Theorie wussten, in wie weit, ist aber wohl nicht ausgemacht. Wenn sich aber Leibniz vorwurfsvoll dahin ausspricht *): „In eo autem fecere illi (die Anhänger Newton's) callide quod litem movere distulerunt, donec obiere harum rerum conscii, Hugenus, Wallisius, Tschirnhausius, aliique, quorum testimonio refelli potuissent“, so kann sich dies nur auf Huygens beziehen, der bereits 1695 starb. Wallis lebte bis 1703, Tschirnhaus bis 1708. Beide erlebten also den Anfang des Streites, der 1699 durch Fatio de Duillier begonnen ward**), und zwar in einer Gestalt, dass sich Leibniz unmöglich verhehlen konnte, die Sache werde sehr ernst werden und wohl nicht so bald ihr Ende erreichen. Gleichwohl berief er sich auf das Zeugnis seiner Freunde, wodurch mit einem Male allen weiteren Zwistigkeiten ein Ende gemacht worden wäre, nicht. Allem aber hätte er auf das Sicherste vorbeugen können, wenn er 1684 seine Theorie wenigstens vollständig, ohne allen Rückhalt, ohne dieselbe in den Schleier des Geheimnisses hüllen zu wollen, mitgetheilt und aufgestellt hätte. Indem nun Leibniz von allem diesem, was seine Ehre vor jedem Zweifel gesichert hätte, nichts that und die gewöhnlichsten und am Nächsten liegenden Vorsichtsmassregeln verabsäumte, benahm er der Aussen- und insbesondere der Nachwelt, die nur nach Thatsachen urtheilen kann und darf, die Möglichkeit, sich Gewissheit zu verschaffen; wenn sie sich also geirrt hat, so fällt auf sie nur ein Theil der Schuld.

*) „Historia et origo etc.“ pag. 1.

**) Guhrauer's Biographie. Th. 1. pag. 305.

§. 9.

Die Differenzialrechnung am Ende des 17^{ten} Jahrhunderts und die Bernoulli'sche Reihe.

Es ist bereits im vorigen §. erwähnt worden, dass die Theorie des Unendlichkleinen einestheils als den damals geläufigen Vorstellungen am nächsten stehend, anderntheils von der Leibnizischen Philosophie geschützt und diese wiederum stützend, unter den Mathematikern des Continents sich sehr rasch verbreitete. Es wird nicht ohne Interesse sein, zu erfahren, auf welchem Standpunkte sie sich bereits zehn Jahre nach ihrer Erfindung befand. Um dies zu zeigen, mag es hinreichen, darzustellen, auf welche Weise einer der Hauptrepräsentanten der damaligen Zeit, Johann Bernoulli, den Beweis einiger Sätze führte; und zwar wählen wir als erstes Beispiel die Art und Weise, wie derselbe zu der nachbenannten Bernoulli'schen Reihe *) Reihe gelangte. Im Jahre 1694**) stellte derselbe nämlich folgende offenbar richtige Identitätsgleichung auf:

$$ydx = ydx + (xdy - xdy) - \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx} \right) + \left(\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^2} \right) - \dots$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$ydx = (ydx + xdy) - \left(\frac{x}{1} \cdot dx + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx} \right) + \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^2} \right) - \dots$$

Nun ist jedenfalls: $ydx + xdy = d(yx) = d\left(\frac{x}{1} \cdot y\right)$;

$$\text{ferner: } \frac{x}{1} \cdot dy + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx} = \frac{2x dx \cdot dy + x^2 \cdot d^2y}{1 \cdot 2 \cdot dx} = \frac{d(x^2) \cdot dy + x^2 \cdot d^2y}{1 \cdot 2 \cdot dx}$$

$$= d\left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{dy}{dx}\right);$$

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^2} = \frac{3x^2 dx \cdot d^2y + x^3 d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^2} = \frac{d(x^3) d^2y + x^3 d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^2}$$

$$= d\left(\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right) \text{ u. s. w.}$$

*) Vergl. Snell: „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung.“ Theil 2. pag. 203.

**) „Acta Eruditorum.“ 1694.

Wir können also unsere Gleichung so schreiben:

$$ydx = d\left(\frac{x}{1} \cdot dy\right) - d\left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) + d\left(\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right) - \dots$$

Wird nun beiderseits integrirt, was Bernoulli auf der linken Seite durch Vorsetzen von *omn.* andeutet, so ergibt sich:

$$\text{omn. } ydx = \frac{x}{1} \cdot y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \dots$$

Es ist leicht, diese ursprüngliche Gestalt der Bernoulli'schen Reihe auf die jetzt gebräuchliche Form zu bringen. Wie erwähnt, bedeutet *omn. ydx*

nichts Anderes als $\int ydx$. Nehmen wir nun, da y , mithin auch $\int ydx$

als Function von x vorausgesetzt wird, an, es sei $\int ydx = f(x)$ minus

einer beliebigen Constanten C , folglich $y = \frac{df(x)}{dx}$, so ist offenbar unsere

Gleichung identisch mit dieser:

$$f(x) - C = \frac{x}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} - \dots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung annullirt sich nun für $x = 0$; dasselbe muss auch mit der linken der Fall sein, es muss also, da für $x = 0$, $f(x)$ in $f(0)$ übergeht, $C = f(0)$ sein. Wir können also unserem Resultate die Form geben:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} - \dots$$

unter welcher Form die Bernoulli'sche Reihe jetzt dargestellt zu werden pflegt. Die Untersuchung der Convergenz lässt Bernoulli ausser Acht. Es mag nun noch gezeigt werden, wie derselbe Satz von Raphson mit Hülfe der Fluxionsrechnung dargestellt ward *). Derselbe sucht nämlich die Fluente von $y\dot{x}$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln. Zu diesem Zwecke schliesst er folgendermaassen: Gesetzt die gesuchte Fluente wäre $Ax^m y^n$, so müsste umgekehrt die Fluxion $y\dot{x}$ gleich sein der Fluxion $Ax^m y^n$, d. h. es müsste die Gleichung gelten:

$$y\dot{x} = Amx^{m-1}y^n\dot{x} + Anx^m y^{n-1}\dot{y}. \quad \alpha)$$

In dieser Gleichung sind aber drei Unbekannte, A , m , n , die aus ihr

*) Raphson: „Historia fluxionum.“ London, 1715. Cap. IX.

allein nicht bestimmt werden können. Wir nehmen daher noch eine zweite Gleichung willkürlich hinzu und stellen die Bedingung, dass das erste Glied der rechten Seite der linken gleich sein soll, dass also die Gleichung gelte:

$$y\dot{x} = Amx^{m-1} \cdot y^n \cdot \dot{x}.$$

Dies ist offenbar nur möglich, wenn

$$A = 1, \quad m = 1, \quad n = 1$$

ist. Werden diese Werthe in $\alpha)$ eingesetzt, so erhalten wir:

$$y\dot{x} = y\dot{x} + x\dot{y}$$

und folglich, wenn wir die Fluente jedes Gliedes durch Vorsetzen von $\mathcal{f}$. bezeichnen:

$$\mathcal{f}.y\dot{x} = \mathcal{f}.y\dot{x} + \mathcal{f}.x\dot{y}$$

oder, da $\mathcal{f}.y\dot{x} = xy$ ist: $\mathcal{f}.y\dot{x} = xy + \mathcal{f}.x\dot{y}.$ $\beta)$

Dies Alles ergab sich unter der Voraussetzung, dass Ax^my^n , oder vermöge der Werthe $A = m = n = 1$, dass xy die gesuchte Fluente sei. Da nun unter dieser Annahme etwas Falsches, nämlich die Gleichung $\beta)$ herauskommt, so folgt, dass die gesuchte Fluente um das Glied $\mathcal{f}.x\dot{y}$ zu gross angenommen worden ist. Es ist also dieselbe offenbar $= xy - \mathcal{f}.x\dot{y}.$

Setzt man nun wieder: $\mathcal{f}.x\dot{y} = Bx^p \cdot \dot{y}^q,$

so muss daraus gefolgert werden:

$$x\dot{y} = Bpx^{p-1} \cdot \dot{y}^q \dot{x} + Bqx^p \dot{y}^{q-1} \ddot{y}. \quad \gamma)$$

Stellen wir wieder die Bedingung, dass

$$x\dot{y} = Bpx^{p-1} \dot{y}^q \dot{x}$$

sein soll, so folgt, wie Raphson schliesst:

$$B = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad p = 2, \quad q = 1, \quad \dot{x} = 1.$$

Also *) ist nach $\gamma)$: $x\dot{y} = x\dot{y} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y},$

woraus folgen würde: $\mathcal{f}.x\dot{y} = \frac{x^2}{1 \cdot 2} \dot{y} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y}.$

Diese Gleichung ist aber abermals falsch, es ist also die Annahme, dass $\mathcal{f}.x\dot{y} = Bx^p \dot{y}^q$ und $B = \frac{1}{2}, \quad p = 2, \quad q = 1,$ d. h. dass $\mathcal{f}.x\dot{y} = \frac{x^2}{2} \dot{y}$ sei,

unrichtig und zwar beträgt der Fehler $\mathcal{f}.\frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y}.$ Mithin ist $\mathcal{f}.x\dot{y} = \frac{1}{2}x^2\dot{y} - \mathcal{f}.\frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y}.$ Indem nun das erste Glied der gesuchten Reihe $xy - \mathcal{f}.x\dot{y}$

*) $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ bezeichnen die erste, zweite, dritte Fluxion von $y.$

war, können wir vermöge dieses Werthes von $\mathfrak{fl}.xy$ sagen, es ist dieses
Glied $= xy - \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \dot{y} - \mathfrak{fl}. \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \ddot{y} \right) = xy - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \dot{y} + \mathfrak{fl}. \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \ddot{y}$.

Wir haben also: $\mathfrak{fl}.y\dot{x} = \frac{xy}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \dot{y} + \mathfrak{fl}. \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \ddot{y}$.

Wird nun: $\mathfrak{fl}. \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y} = Cx^r \ddot{y}^s$

angenommen, so folgt hieraus:

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y} = Cx^{r-1} \dot{y}^s \dot{x} + Cs x^r \ddot{y}^{s-1} \ddot{y}.$$

Wenn wir jetzt

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y} = Cx^{r-1} \dot{y}^s \dot{x}$$

voraussetzen, woraus sich ergibt:

$$C = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad r = 3, \quad s = 1, \quad \dot{x} = 1,$$

so wird also:

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y} = \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y},$$

folglich:

$$\mathfrak{fl}. \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y} = \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y} + \mathfrak{fl}. \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y}.$$

Da dies abermals falsch ist, so folgt, dass $\mathfrak{fl}. \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ddot{y}$ nicht $= \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y}$
sein könne, sondern $= \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y} - \mathfrak{fl}. \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y}$ sein müsse; es ergibt
sich also nach γ):

$$\mathfrak{fl}.y\dot{x} = \frac{x}{1} \cdot y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \dot{y} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y} - \mathfrak{fl}. \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y}.$$

Wird auf diese Weise die Rechnung bis ins Unendliche fortgesetzt, so er-
giebt sich die Gleichung:

$$\mathfrak{fl}.y\dot{x} = \frac{x}{1} \cdot y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \dot{y} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ddot{y} - \dots$$

Vertauscht man hier das Fludentzeichen $\mathfrak{fl}.$ mit dem Integralzeichen $\int$,

die Fluxionen $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$ mit den Differenzialen $dy, d^2y, \dots$ und bedenkt,

dass $\dot{x} = 1$ war, also $\frac{\dot{y}}{x}$ statt $\dot{y}$, $\frac{\ddot{y}}{x^2}$ statt $\ddot{y}$ u. s. w. gesetzt werden kann,

so erkennt man, dass dies die Bernoulli'sche Reihe in der von Bernoulli
aufgestellten Form ist. Was aus dem immer vorhandenen Fehler werde,
untersucht auch Raphson nicht.

Als zweites Beispiel mag folgendes dienen. Es ist bereits erwähnt worden, dass der Holländer Nieuwentiit in seiner gegen Leibniz gerichteten Abhandlung im Jahre 1695 auch Bernoulli mit angegriffen habe; und zwar warf er ihm vor, er habe sich bei der Lösung des Beaune'schen Problems geirrt. Hiergegen nun vertheidigt sich Bernoulli dadurch, dass er seine Lösung dem mathematischen Publicum zur Beurtheilung vorlegt*) und zugleich dem Angreifer Nieuwentiit selbst einen Fehler nachweist. Die Aufgabe nämlich, um die es sich handelt, und deren Lösung bereits von Leibniz im Juli 1676 und in den Act. Erud. 1684 wenigstens im Allgemeinen angegeben worden war, ist folgende: Diejenige Curve zu finden, in welcher die Ordinate sich zur Subtangente verhält, wie eine gegebene Constante zu dem Stücke der Ordinate, welches zwischen der fraglichen Curve und einer die Abscissenachse im Coordinatenanfangspunct unter einem Winkel von 45° schneidenden Geraden eingeschlossen ist. Bezeichnen wir die gegebene Constante durch r , die Ordinate der fraglichen Curve durch MP (Fig. 36), die Ordinate der Geraden, welche also die Coordinatenachsen unter einem halben rechten Winkel schneidet, durch MP' , die Subtangente durch MT , so soll sich also verhalten:

$MP : MT = r : MP - MP'$.
Bernoulli löst nun die Aufgabe folgendermaassen: Die Ordinate MP werde durch y , die Abscisse OM durch x bezeichnet, so ist, da $\angle P'OM = 45^{\circ}$ ist, offenbar $MP' = OM = x$, ferner ist der Ausdruck für die Subtangente:

$MT = y \frac{dx}{dy}$. Mithin lautet die charakteristische Eigenschaft der verlangten Curve darstellende Proportion:

$$y : y \frac{dx}{dy} = r : y - x$$

oder: $1 : \frac{dx}{dy} = r : y - x$,

woraus folgt: $y - x = r \cdot \frac{dx}{dy}$

oder: $xdy = ydy - rdx$.

Nun bezeichnet xdy geometrisch nichts Anderes als ein unendlich kleines Rechteck $QPSR$, und alle solche Rechtecke bilden die dreieckartige Fläche

*) „Acta Eruditorum.“ 1696. pag. 78.

OQP. Es folgt also aus unserer Gleichung durch Integration, die Bernoulli auch hier durch Vorsetzung von „omnia“ andeutet:

$$\text{omnia } xdy = \text{omnia } ydy - \text{omnia } rdx$$

oder: $\text{omnia } xdy = \frac{y^2}{2} - rx + \text{Constans.}$

Die Constante bestimmt sich nun daraus, dass $\text{omnia } xdy$ die Fläche **OQP** bedeutet, die also für $x = 0$ und $y = 0$ sich annulliren muss. Aus dieser Bedingung ergibt sich nun, dass auch die Constante $= 0$ sein muss. Wir haben also die Gleichung:

$$\text{omnia } xdy = \frac{y^2}{2} - rx.$$

Nun sucht Bernoulli den Werth von $\text{omnia } xdy$ inoch auf eine zweite Art zu ermitteln, und erreicht dies auf folgende Weise. Man construire links von der bisherigen Ordinatenachse, indem man die Linie **QU** durch z bezeichnet, die Curve, deren Gleichung ist: $z = me^{-\frac{y}{r}}$, die also, da für $y = 0$, $z = m$ wird, die frühere Abscissenachse in der Entfernung $OA = m$ links vom Coordinatenanfangspunkt schneidet. Man überzeugt sich leicht, dass diese Curve die Eigenschaft hat, dass ihre Subtangente **OI** constant ist, und zwar ist ihre Länge, wenn man bloss den absoluten Werth berücksichtigt, $= r$. Nun werde auf dieser links von **OY** liegenden Curve ein solches Stück **AU** gesucht, dass $UF = OM = x$, also $M'F = y - x$ ist, wenn **AI** die Tangente im Schnittpunkte **A**, mithin **OI** seinem absoluten Werthe nach $= r$ ist. Es verhält sich nun in den Dreiecken **AM'F** und **AOI**

$$AM' : M'F = AO : OI.$$

d. h. da nach dem Vorigen $AO = m$, $OM' = QU = z$ ist:

$$m - z : y - x = m : r,$$

woraus folgt:

$$rm - rz = my - mx.$$

Wird diese Gleichung mit dem Differenzial dy multiplicirt, so lautet sie:

$$rmdy - rzdy = mydy - mxdy,$$

folglich:

$$xdy = ydy - rdy + \frac{rz}{m}dy.$$

Nun war $z = me^{-\frac{y}{r}}$, also $\frac{z}{m} = e^{-\frac{y}{r}}$; mithin $\frac{dz}{m} = -\frac{1}{r}e^{-\frac{y}{r}} \cdot dy = -\frac{1}{r}$

$\cdot \frac{z}{m} \cdot dy$, folglich: $dy = -\frac{r}{z} \cdot dz.$

Wird dieser Werth von dy in das letzte Glied der rechten Seite der letz-

ten Gleichung für xdy eingesetzt, so lautet dieselbe:

$$xdy = ydy - rdy - \frac{r^2}{m} \cdot dz;$$

durch Integration folgt hieraus:

$$\text{omnia } xdy = \frac{y^2}{2} - ry - \frac{r^2}{m} \cdot z + \text{Const.}$$

Nieuwentiit hatte nun bei der von ihm gegebenen Lösung dieses Problems hier keine Constante hinzugesetzt, und mit Recht wirft ihm Bernoulli dies als einen Fehler vor. Denn hier ist die Constante nicht $= 0$. Es muss nämlich, da *omnia* xdy die Fläche OQP bedeutet, die rechte Seite dieser Gleichung, wie oben erwähnt wurde, für $x = 0$ und $y = 0$ sich annulliren, indem dies mit der linken der Fall ist. Nun folgt, wie oben gezeigt wurde, dass, wenn $y = 0$ ist, $z = me^{-\frac{y}{r}}$ den Werth m annimmt. Wir erhalten daher zur Bestimmung der Constanten die Gleichung:

$$0 = -r^2 + \text{Const.}$$

mithin: $\text{Const.} = r^2$.

Wir haben also für die Fläche OQP die zweite Gleichung:

$$\text{omnia } xdy = \frac{y^2}{2} - ry - \frac{r^2}{m} z + r^2.$$

Durch Vergleichung dieses Werthes von *omnia* xdy mit dem oben gefundenen, ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{y^2}{2} - rx = \frac{y^2}{2} - ry - \frac{r^2}{m} z + r^2,$$

oder:

$$\frac{z}{m} = \frac{r+x-y}{r}.$$

Da aber $z = me^{-\frac{y}{r}}$ war, können wir dieselbe schreiben:

$$e^{-\frac{y}{r}} = \frac{r+x-y}{r}$$

und also, wenn durch l der natürliche Logarithme bezeichnet wird:

$$y = r \cdot l\left(\frac{r}{r+x-y}\right)$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Curve. Man kann sich von der Richtigkeit dieser von Bernoulli gegebenen Lösung leicht auf andere Weise überzeugen. Da sich die Ordinate zur Subtangente verhalten soll, wie eine Constante r zur Differenz zwischen der Ordinate der Curve und der die

Coordinaten unter einem halben rechten Winkel schneidenden Geraden, haben wir also, wie oben schon bemerkt wurde, die Proportion:

$$y : y \frac{dx}{dy} = r : y - x,$$

woraus folgt: $y - x = r \frac{dx}{dy}.$

Da nun in dieser Differenzialgleichung die Variabelen nicht getrennt werden können, führen wir eine neue Veränderliche ein, indem wir $y - x = z$, also $x = y - z$ setzen. Dann lautet die Gleichung:

$$z = r \cdot \frac{dy - dz}{dy} = r \left(1 - \frac{dz}{dy} \right)$$

oder:
$$dy = \frac{dz}{1 - \frac{z}{r}}.$$

Integriert man beiderseits, so erhält man:

$$y = C - r \cdot l \left(1 - \frac{z}{r} \right)$$

oder, vermöge des Werthes von $z = y - x$:

$$y = C - r \cdot l \left(1 - \frac{y - x}{r} \right) = C - r \cdot l \left(\frac{r + x - y}{r} \right).$$

Da nun für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, so erhält man zur Bestimmung der Constanten C die Gleichung $0 = C$, mithin ist:

$$y = -r l \left(\frac{r + x - y}{r} \right)$$

oder:
$$y = r \cdot l \left(\frac{r}{r + x - y} \right),$$

also dieselbe Gleichung, die Bernoulli erhalten hat.

In demselben Jahre 1696 erschien übrigens das erste Handbuch der Infinitesimalrechnung, gestützt auf die Theorie des Unendlichkleinen von einem der berühmtesten der damaligen Mathematiker, dem Marquis de l'Hospital (oder de l'Hôpital) unter dem Titel: „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.“ 1696, in welcher die Differenzialrechnung in ihrer Anwendung auf Geometrie bereits ziemlich in demselben Umfange dargestellt wird, wie wir sie noch heute kennen.

§. 10.

Die Theorie Nieuwentiit's.

In demselben Jahre, in welchem der Holländer Nieuwentiit Leibnizens Differenzialrechnung in den Actis Eruditorum angriff (s. §. 8), erschien von ihm selbst ein Buch*), in welchem er die Probleme der Tangenten, Quadratur, Maxima und Minima auf seine Weise löste und zwar durch eine seiner Meinung nach völlig klare Methode. Indem er nun der erste war, der gegen die Differenzialrechnung auftrat, dürfte es wohl der Mühe werth sein, zu untersuchen, was er an die Stelle derselben setzte. Zunächst macht er darauf aufmerksam, dass der Begriff des Unendlichgrossen oder Unendlichkleinen vom menschlichen Geiste nicht gefasst werden könne; nur aus den Eigenschaften derselben liessen sich einige Sätze ableiten, worunter sich besonders die Definition des „Nichts“ („nihil“), welches Nieuwentiit als identisch mit „Null“ annimmt, befindet. Er definirt nun das „nihil“ so: Jede Grösse der Art, dass sie auch mit einer noch so grossen Zahl („numero infinite magno“) multiplicirt, keine Zahl gebe, nicht einmal eine solche, die jeden beliebigen Grad der Kleinheit besitze, sei für „nihil“ anzusehen. Es leuchtet ein, dass diese Definition nicht in allen Fällen stichhaltig ist. Es würde sich z. B. nach ihr nicht erklären lassen, wie der Ausdruck $\cos. x \cdot \text{tang. } x$ für $x = \frac{\pi}{2}$ den Werth 1 annimmt,

da $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\text{tang} \frac{\pi}{2} = \infty$ ist, indem man leugnen müsste, entwe-

der, dass $\cos \frac{\pi}{2}$ wirklich $= 0$, oder dass $\text{tang. } \frac{\pi}{2}$ wirklich $= \infty$ sei. Allein auch abgesehen von diesem Mangel hebt Nieuwentiit selbst die aufgestellte Definition des „nihil“ durch das zweite seiner Axiome auf, welches dahin lautet, jede Grösse könne durch unausgesetzte Division zu einem „nihil“ reducirt, hingegen auch jede Grösse durch eine in das Unendliche gehende Multiplication über das „nihil“ erhoben werden. Letzteres nun steht offenbar mit der Definition desselben im Widerspruch. Allein Nieuwentiit spricht sich hierüber folgendermaassen aus: Zuerst führt er für eine unendlich

) Bernhardi Nieuwentiitii: „Analysis infinitorum seu curvilinearum proprietates ex polygonorum natura deductae.“ Amstelaedami 1695. ()

grosse Grösse die Bezeichnung ein: „*quantitas infinita*“, und gebraucht durchgängig den Buchstaben m für eine solche; für eine unendlich kleine Grösse bedient er sich des Ausdrucks: „*quantitas infinitesima*“. Dies vorausgeschickt erklärt er sich nun dahin, nur der unendlichste Theil einer „*quantitas infinitesima*“ sei das „*nihil*“, indem er hiermit sein zweites Axiom von einem Widerspruche befreien will. Es bedarf keines Beweises, dass diese seine Erklärung ebenfalls gänzlich unklar ist. Sie ist auch hier nur angeführt worden, weil er aus ihr mehrere andere Sätze ableitet, die von Wichtigkeit sind. Indem nämlich m eine unendlich grosse Zahl, „*quantitas infinita*“ vorstellt (Zahl und Grösse unterscheidet Nieuwentiit nirgends), so ergiebt sich ihm als Symbol für eine „*quantitas infinitesima*“ das Zeichen $\frac{b}{m}$, worin b irgend eine endliche, sonst aber ganz beliebige Zahl bedeutet. Eine solche durch $\frac{b}{m}$ vorgestellte *quantitas infinitesima* also hält nun Nieuwentiit für etwas von nihil Verschiedenes, weil sie mit der unendlich grossen Zahl m multiplicirt etwas Endliches, nämlich b gebe (was der Definition des „*nihil*“ widerspricht); er räumt daher einer solchen auch in der Geometrie eine Bedeutung ein. Dagegen folgert er, dass das Product zweier *quantitates infinitesimae*, deren eine durch $\frac{b}{m}$, die andere durch $\frac{c}{m}$ vorgestellt wird, dass also $\frac{bc}{m^2}$ ein „*nihil*“ sei, weil es mit der unendlich grossen Zahl m multiplicirt, $\frac{bc}{m}$, also eine *quantitas infinitesima* und nicht eine endliche Zahl hervorbringe, dass also eine durch einen Ausdruck $\frac{bc}{m^2}$ dargestellte Grösse eine Bedeutung in der Geometrie nicht habe. Dies reicht hin, einmal um die Rechnungen Nieuwentiit's zu verstehen, anderntheils auch ein Urtheil über seine Methode zu gewinnen. Seine Hauptabsicht bei der Aufstellung seines Algorithmus, wenn man so sagen darf, war, die Differenziale höherer Ordnungen, über die er sich an der oben erwähnten Stelle der Act. Erud. gegen Leibniz ausgesprochen hatte, zu vermeiden. Allein man wird einem von Leibniz erwähnten*) Baseler Mathematiker Namens Hermann beistimmen, wenn derselbe sich dahin ausspricht, dass Nieuwentiit dieselben nur „*nomine*“, nicht „*re*“ vermieden

*) „*Historia et origo calculi differentialis.*“ pag. 39 u. 40.

habe *), und wird leicht bemerken, dass hier die vollständige Theorie des Unendlickleinen, nur unter anderer Gestalt, wiederkehrt.

Mit Hülfe dieser seiner Theorie wendet sich nun Nieuwentiit zu den Aufgaben der Geometrie. Er beweist zuerst, dass die Sehne eines unendlich kleinen Bogens auch unendlich klein sei, ja er sucht streng mathematisch nachzuweisen, dass jede Curve als ein Polygon von unendlich kleinen Seiten angesehen werden könne. Zu dem Zwecke verfährt er so: Es sei (Fig. 37) OP_1M_2 ein Stück einer Curve, OQ_2 sei die Tangente in O , von M_2 werde nach einem beliebigen Punkte Q_2 dieser Tangente die M_2Q_2 und von einem andern Punkte M_1 eine Gerade $M_1Q_1 \parallel M_2Q_2$ gezogen. Wird nun die Sehne OP_1 bis nach N_1 verlängert und $ON_2 = ON_1$ gemacht, so lässt sich zeigen, dass wenn der Bogen OP_1 und folglich auch die Sehne OP_1 und das Stück N_2Q_2 unendlich klein wird, die Differenz zwischen OP_1 und OQ_1 verschwinde. Denn, fährt Nieuwentiit fort, bezeichnen wir die quantitas infinitesima N_2Q_2 durch $\frac{c}{m}$, die Sehne OP_1

durch $\frac{b}{m}$, so können wir die in den Dreiecken OQ_2N_1 und OQ_1P_1 bestehende Proportion: $OQ_2 : ON_1 = OQ_1 : OP_1$,

die sich, da $ON_2 = ON_1$ war, auch umformiren lässt in:

$$OQ_2 : ON_2 = OQ_1 : OP_1,$$

oder in:

$$OQ_2 - ON_2 : ON_2 = OQ_1 - OP_1 : OP_1,$$

$$\text{d. h.} \quad N_2Q_2 : ON_2 = OQ_1 - OP_1 : OP_1$$

$$\text{auch schreiben:} \quad \frac{c}{m} : ON_2 = OQ_1 - OP_1 : \frac{b}{m};$$

folglich wird die Differenz: $OQ_1 - OP_1 = \frac{1}{ON_2} \cdot \frac{bc}{m^2}$.
Da nun $\frac{bc}{m^2}$ ein „nihil“ ist, so folgt, dass auch die Differenz $OQ_1 - OP_1$ verschwindet. Indem aber zugleich die Differenz zwischen dem Bogen OP_1

*) Leibniz fährt daselbst fort: „In eo tamen landandus omnino est, quod desiderat calculum infinitesimalem muniri demonstrationibus, ut scrupulis satisfiat etc.“ Wie sehr ihn überhaupt der Angriff Nieuwentiit's interessirte, ist aus dem neuerdings von Gerhardt in seinem Werke: „Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von Dr. Gerhardt.“ Halle 1855. veröffentlichten Briefwechsel mit Jacob und Johann Bernoulli, deutlich ersichtlich.

und der Sehne OP_1 schwindet, folgt, dass auch der Unterschied der Tangente OQ_1 und des Bogens OP_1 sich annullirt. Es kann also, schliesst Nieuwentiit, für ein verschwindend kleines Bogenstück ein Stückchen OQ , die Tangente oder die Sehne gesetzt, mithin die Curve als Polygon angesehen werden.

Bevor wir zu seiner Tangentenmethode übergehen, muss erst noch ein Satz erwähnt werden, den Nieuwentiit aufstellte, dass nämlich in einer auf 0 reducirten Gleichung, in welcher einige Glieder vorkommen, die die unendlich grosse Zahl m als Factor besitzen, alle übrigen Glieder vernachlässigt werden können. Es sei z. B. gegeben:

$$my^2 + py - mx^2 + px + m \cdot r = 0,$$

so, folgert Nieuwentiit, können wir sie durch m^2 dividiren, wodurch sich ergibt:

$$\frac{y^2}{m} + \frac{py}{m^2} - \frac{x^2}{m} + \frac{px}{m^2} + \frac{r}{m} = 0;$$

oder, da alle Glieder, die m^2 im Nenner haben, ein „nihil“ sind, folgt

$$\text{also, dass} \quad \frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{m} + \frac{r}{m} = 0,$$

folglich:

$$y^2 - x^2 + r = 0.$$

Dieser Satz lässt sich aber auch noch anders aussprechen. Wir können nämlich die gegebene Gleichung $my^2 + py - mx^2 + px + rm = 0$ auch schreiben:

$$y^2 + \frac{py}{m} - x^2 + \frac{px}{m} + r = 0. \quad \text{Da nun } y^2 - x^2 + r = 0 \text{ ist, die anderen}$$

Glieder $\frac{py}{m}, \frac{px}{m}$ aber quantitates infinitesimae sind, so können wir sagen:

In jeder endliche und unendlich kleine Grössen enthaltenden auf Null reducirten Gleichung können erstere vernachlässigt werden. In dieser Fassung wird nun das Theorem im Folgenden stets angewendet.

Nach Aufstellung dieser und ähnlicher Sätze geht Nieuwentiit auf das Tangentenproblem über. Er löst dasselbe entweder durch Bestimmung der Subtangente oder mit Hülfe einer anderen Curve. Was nun die erste Methode, die Bestimmung der Subtangente anlangt, so führt er dieselbe so aus. Er nimmt auf der Abscisse ein unendlich kleines Stück $\frac{b}{m}$ an, so wird die Differenz der Ordinate ebenfalls ein unendlich kleines Stück sein, und da jede Curve als Polygon betrachtet wird, so lässt sich diese Differenz der Ordinate aus der Abscisse leicht berechnen. Denn nen-

nen wir die fragliche Subtangente s , die ebenfalls fragliche Differenz der Ordinate z , so verhält sich:

$$y : s = z : \frac{b}{m}.$$

Es ist also die unendlich kleine Ordinatendifferenz: $z = \frac{by}{ms}$; und dies gilt für jede Curve. Um z. B. die Subtangente der Ellipse zu finden, verfährt Nieuwentiit so: Die Gleichung derselben sei:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Wird nun für x eingesetzt: $x + \frac{b}{m}$, folglich $y + \frac{b}{ms}$ für y , eine Operation, die Nieuwentiit mit dem Ausdrucke: „*reductio aequationis ad infinitesimas*“ bezeichnet, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{2bx}{m\alpha^2} + \frac{b^2}{m^2\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{2y^2b}{ms\beta^2} + \frac{y^2b^2}{m^2s^2\beta^2} = 1.$$

Indem nun alle Glieder, die m^2 im Nenner haben, als ein „*nihil*“ wegzulassen sind, bleibt:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{2bx}{m\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{2y^2b}{ms\beta^2} - 1 = 0.$$

Ferner sind nach der oben aufgestellten Regel alle Glieder, die m im Nenner nicht enthalten, wegzulassen. Wir erhalten also:

$$\frac{2bx}{m\alpha^2} + \frac{2y^2b}{ms\beta^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$s = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{y^2}{x},$$

folglich:

$$s = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{y^2}{x^2}.$$

Man sieht, wie ähnlich dieses Verfahren dem in §. 6. dargestellten von Barrow angegebenen ist. Zur Bestimmung der Subtangente s kann übrigens, wie Nieuwentiit bemerkt, statt der Ordinate y auch die Curvenlänge angewandt werden, wenn man dieselbe kennt. Denn lassen wir wieder die Abscisse x um $\frac{b}{m}$ wachsen, nennen den Bogen v , der also bekannt ist, so wächst derselbe ebenfalls nur um ein unendlich kleines Stück, welches sich bestimmen lässt. Denn dieses Bogenelement liegt immer in der Richtung der Tangente, die t heissen mag. Nennen wir das Bogenelement ζ , so muss sich offenbar verhalten:

$$t : s = \zeta : \frac{b}{m};$$

es ist also der Ausdruck für das Längenelement der Curve $\zeta = \frac{bt}{ms}$. Als

Beispiel für dieses Verfahren diene die gemeine Cycloide. Die Länge v eines Stückes OP (Fig. 38) wird ausgedrückt durch die Gleichung $v = 2\sqrt{2rx}$ *), wenn die Abscisse OM durch x bezeichnet wird. Wird beider-

seits quadriert, so ergibt sich $v^2 = 8rx$; setzen wir nun $x + \frac{b}{m}$ an die

Stelle von x , so ist $v + \frac{bt}{ms}$ für v einzusetzen, und wir erhalten die Gleichung:

$$v^2 + \frac{2bvt}{ms} + \frac{b^2t^2}{m^2s^2} = 8rx + \frac{8rb}{m};$$

oder, da das Glied, welches m^2 im Nenner hat, $= 0$ ist:

$$v^2 + \frac{2bvt}{ms} - 8rx - \frac{8rb}{m} = 0.$$

Jetzt sind wieder nach dem oben erwähnten Satze Nieuwentiit's die mit m nicht dividirten Glieder wegzulassen. Wir haben also die Gleichung:

$$2bvt - 8rbs = 0$$

oder:

$$tv = 4rs.$$

Nun ist stets: $s = \sqrt{t^2 - y^2}$,

wenn y die Ordinate bezeichnet, also:

$$t = \frac{4r \cdot y}{\sqrt{4r^2 - v^2}}$$

Aus dieser Formel ergibt sich nun sogleich eine Construction der Tangente der Cycloide. Es wird nämlich die Länge v eines Curvenstückes OP gefunden, indem man die Abscisse $OM = x$ von A nach B trägt und dann über OB als Durchmesser einen Kreis beschreibt, der die Basis EF in D und D' schneidet, dann ist $DD' = v$. Wird nun $OO' = 2OA = 4r$ gemacht und mit dieser Länge als Radius ein Kreis beschrieben, endlich in ihm $O'm_1 = DD' = v$ gemacht und die Ordinate m_1p_1 gezogen, so ist m_1p_1 offenbar $= \sqrt{4r^2 - v^2}$. Zieht man nun $O'p_1$, welches also $= 4r$ ist, und zu ihr parallel SP , so verhält sich, da $MP = y$ ist:

$$\sqrt{4r^2 - v^2} : 4r = y : SP;$$

*) Man sehe in meiner Schrift: „Die cyclischen Curven.“ Eisenach bei J. F. Baerecke. 1856. §. 8.

folglich ist: $SP = \frac{4r \cdot y}{\sqrt{4r^2 - y^2}}$.

Es ist also die gesuchte Tangente t . Da v stets $< 4r$ ist, so fällt bei dieser Construction stets m_1 zwischen O' und Q . Man kann auch v von O' nach O zu abtragen, so dass $O'm_2 = v$ ist, und m_2p_2 ziehen. Dann schneidet eine zu $O'p_2$ durch P gezogene Parallele die Linie OQ zwischen O und Q in S' , und es muss dann durch Einsetzen des Cirkels in P erst PS' nach PS getragen werden. Die Länge $OO' = 4r$ ist übrigens nichts Anderes als der Krümmungshalbmesser der Cycloide im Punkte O , folglich der um O' mit OO' geschlagene Kreis der Krümmungskreis daselbst. Dies ist die eine Methode Nieuwentijt's. Eine zweite ist folgende. Es wird die Subtangente, mithin auch die Tangente einer Curve gesucht mittelst einer anderen in Rücksicht auf ihre Tangente und Subtangente bekannten Curve. Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dieser Methode dienen. Es sei die Subtangente t_1 eines mit dem Halbmesser α construirten Kreises bekannt: gesucht wird die Subtangente t_2 einer mit dem gegebenen Kreise concentrischen Ellipse, deren grosse Halbachse α , deren kleine β sei. Nehmen wir (Fig. 39) den gemeinsamen Mittelpunkt beider zum Coordinatenanfangspunkt, und nennen die Ordinate des zur Abscisse x gehörigen Punktes P_1 des Kreises, y_1 , die des zu derselben Abscisse gehörigen Ellipsenpunktes P_2 . y_2 , (solche Punkte sollen im Folgenden correspondirende Punkte genannt werden), so haben wir die Gleichungen:

$$\text{des Kreises: } y_1 = \sqrt{\alpha^2 - x^2}; \text{ der Ellipse: } y_2 = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Lassen wir nun die Abscisse um ein quantitates infinitesima $M_1M_2 = N_1Q_1 = N_2Q_2 = e$ wachsen, so wächst die Ordinate y_1 des Kreises um eine unendlich kleine Grösse a_1 , die der Ellipse um a_2 . Nun verhält sich:

$$y_1 : t_1 = a_1 : e$$

$$\text{und } y_2 : t_2 = a_2 : e.$$

Bestimmen wir aus beiden Proportionen e , und setzen die sich ergebenden Werthe einander gleich, so erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{a_1 t_1}{y_1} = \frac{a_2 t_2}{y_2};$$

woraus sich ergibt:

$$a_1 = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot a_2.$$

Indem nun aber $y_1 = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ und $y_2 = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ ist, erhalten wir einen zweiten Ausdruck für a_1 . Zunächst nämlich ist offenbar:

$$y_2 = \frac{\beta}{\alpha} y_1.$$

Wird jetzt $y_2 + a_2$ und $y_1 + a_1$ an die Stelle bezüglich von y_2 und y_1 gesetzt, so entsteht die Gleichung:

$$y_2 + a_2 = \frac{\beta}{\alpha} y_1 + \frac{\beta}{\alpha} a_1.$$

Indem nun y_2 und $\frac{\beta}{\alpha} y_1$ die einzigen Grössen dieser Gleichung sind, die nicht infinitesimae sind, sind sie wegzulassen und wir erhalten also die Gleichung:

$$a_2 = \frac{\beta}{\alpha} a_1,$$

folglich:

$$a_1 = \frac{\alpha}{\beta} a_2.$$

Werden nun die beiden so gefundenen Werthe von a_1 , nämlich $\frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} a_2$,

der, da $y_2 = \frac{\beta}{\alpha} y_1$ ist, sich auch schreiben lässt: $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot a_2$, und $\frac{\alpha}{\beta} a_2$ gleich gesetzt, so ergibt sich die Beziehung:

$$t_2 = t_1.$$

Wie man sieht, ist dies der bekannte Satz, dass die Subtangente an einen Punkt der Ellipse und den correspondirenden Punkt des mit der grossen Halbachse derselben als Halbmesser beschriebenen Kreises einander gleich sind. Wir untersuchen noch auf dieselbe Weise die Subtangente der Neil'schen Parabel (Fig. 40). Diese Linie wird auf folgende Weise construirt. Es sei die Gleichung einer gemeinen Parabel $y_1 = \sqrt{px}$, worin p die vierfache Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel bezeichnet; so wird für $x = p$, die zu diesem speciellen Werthe $AN = p$ der Abscisse gehörige specielle Ordinate NQ ebenfalls $= p$. Es sei nun MP_1 eine andere Ordinate der gemeinen Parabel, die zu einer Abscisse gehört, welche entweder kleiner oder grösser als AN ist. Von P_1 werde eine Parallele zur Abscissenachse gezogen, bis sie die Ordinate NQ oder ihre Verlängerung in R_1 schneidet. Zieht man nun AR , welche die Ordinate MP_1 oder ihre Verlängerung in P_2 trifft, so verhält sich:

$$AM : MP_2 = AN : NR_1$$

und da AM die Abscisse x der gemeinen Parabel, $NR = MP_1$ die zugehö-

rige Ordinate derselben, also $= \sqrt{px}$, endlich $AN = p$ ist, so können wir, wenn wir MP_2 durch y_2 bezeichnen, die Proportion schreiben:

$$x : y_2 = p : \sqrt{px};$$

woraus folgt:

$$y_2 = x \sqrt{\frac{x}{p}}.$$

Dies ist also die Gleichung der Curve, die den geometrischen Ort der durch die angegebene Construction gefundenen Punkte bildet. Dass sie eine Neil'sche oder anderthalbgradige Parabel ist, erhellt sogleich, wenn man

ihr die Form $y_2 = \sqrt{\frac{x^2}{p}}$ giebt und $\frac{1}{p} = q$ setzt, wodurch sie die gewöhnliche Form $y = \sqrt{qx^3}$ annimmt. Behalten wir aber die ursprüngliche Form

$y_2 = x \sqrt{\frac{x}{p}}$ bei, nennen die Subtangente der gemeinen Parabel wieder t_1 , die gesuchte der aus der gemeinen Parabel abgeleiteten Neil'schen, t_2 , nennen wieder den unendlichkleinen Zuwachs von y_1 , a_1 , dagegen den von y_2 , a_2 , so erhalten wir ganz wie in dem vorigen Beispiele die

Gleichung:
$$a_1 = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot a_2.$$

Die Gleichung der Neil'schen Parabel nun, $y_2 = x \sqrt{\frac{x}{p}}$ können wir offenbar auch schreiben: $y_2 = \frac{x}{p} \sqrt{px}$, oder, da $\sqrt{px} = y_1$ ist:

$$y_2 = \frac{x}{p} y_1.$$

Wir können also die Formel für a_1 auch schreiben:

$$a_1 = \frac{p}{x} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot a_2.$$

Ferner aber folgt aus der Gleichung $y_2 = \frac{x}{p} y_1$, die wir auch $y_2 = \frac{px}{p^2} y_1$

oder $y_2 = \frac{\sqrt{px^2}}{p^2} y_1$ oder, da $\sqrt{px} = y_1$ ist,

$$y_2 = \frac{y_1^3}{p^2}$$

schreiben können, wenn wir $y_2 + a_2$ für y_2 und $y_1 + a_1$ für y_1 einsetzen:

$$y_2 + a_2 = \frac{(y_1 + a_1)^3}{p^2};$$

oder: $p^2 y_2 + p^2 a_2 = (y_1 + a_1)^3.$

Wird nun rechts die Cubirung ausgeführt, und dabei die a_1^2 und a_1^3 ent-

haltenden Glieder, da sie das Quadrat und den Cubus einer unendlich kleinen Grösse, die also nach Nieuwentijt für 0 zu halten sind, zu Factoren haben, weggelassen, so erhalten wir:

$$p^2 y_2 + p^2 a_2 = y_1^3 + 3y_1^2 a_1.$$

Hier sind nun wieder die Glieder, die frei von den unendlich kleinen Grössen a_1 und a_2 sind, $= 0$; es ergibt sich also die Gleichung:

$$p^2 a = 3y_1^2 a_1;$$

folglich:

$$a_1 = \frac{p^2}{3y_1^2} \cdot a_2.$$

Aus der Vergleichung der beiden für a_1 gefundenen Werthe folgt nun die Gleichung:

$$\frac{p}{x} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot a_2 = \frac{p^2}{3y_1^2} \cdot a_2,$$

oder, da $y_1 = \sqrt{px}$ war: $\frac{p}{x} \cdot \frac{t_2}{t_1} = \frac{p}{3x}.$

Es wird also: $t_2 = \frac{1}{3} t_1.$

Wir sehen also: es ist die Subtangente der Neil'schen Parabel gleich dem dritten Theile der Subtangente des correspondirenden Punktes der ihr zu Grunde liegenden gemeinen Parabel. Bei letzterer ist nun bekanntlich die Subtangente t_1 stets $= 2x$, mithin ist $t_2 = \frac{2}{3}x$. — Man bemerkt übrigens leicht, dass diese Tangentenmethode nur dann anzuwenden ist, wenn die beiden in Rede stehenden Curven algebraische Gleichungen haben, indem nur dann in den Ausdrücken für a_1 die quantitatıs infinitesima a_2 als Factor vorkommen kann.

Gehen wir jetzt zum umgekehrten Problem über, aus der Gleichung für die Subtangente s die Curve wieder zu finden. Dies löst Nieuwentijt auf folgende Weise. Im Allgemeinen ist der Ausdruck für die Subtangente ein Bruch: dessen Zähler g , dessen Nenner f heissen möge. Es ist also im Allgemeinen $s = \frac{g}{f}$, woraus folgt $fs = g$. Nun schreibt Nieuwentijt folgende Operationen vor. In dem die linke Seite dieser Gleichung bildenden Ausdrücke fs werde x an die Stelle von s gesetzt, und dann jedes Glied mit dem zugehörigen Exponenten von x dividirt; eine Operation, die er durch das Symbol $\left(\frac{fx}{A} \right)$ andeutet, in dem also das A keine andere Bedeutung hat, als eine auszuführende Operation anzuzeigen, etwa wie das d in der Differenzialrechnung die des Differenzirens bedeutet. Ebenso sollen

auf der rechten Seite, also in dem Ausdrücke g alle Glieder jedes mit dem zugehörigen Exponenten der Variabelen dividirt werden, was durch das Symbol $\left(\frac{g}{B}\right)$ angedeutet wird. Die so erhaltenen Ausdrücke $\left(\frac{fx}{A}\right)$ und $\left(\frac{g}{B}\right)$, durch das Gleichheitszeichen verbunden, liefern dann die verlangte Gleichung der Curve, zu der noch eine Constante hinzutreten kann. Es sei z. B. als Ausdruck für die Subtangente gegeben die Formel:

$$s = -\frac{y^2}{x} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

so ist also $\beta^2 x = f$, $-\alpha^2 y^2 = g$, folglich $fs = \beta^2 xs$; wird nun an die Stelle von s die Abscisse x gesetzt, so entsteht $fx = \beta^2 x^2$; indem weiter durch $\left(\frac{fx}{A}\right)$ angedeutet wird, dass in dem Ausdrücke für fx jedes das x enthaltende Glied mit dem Exponenten von x dividirt werden soll, ergibt sich in unserem Falle: $\left(\frac{fx}{A}\right) = \frac{\beta^2 x^2}{2}$; ebenso wird: $\left(\frac{g}{B}\right) = -\frac{\alpha^2 y^2}{2}$; bezeichnen wir nun durch C eine Constante, so lautet die gesuchte Curven-

gleichung:
$$\frac{\beta^2 x^2}{1} = \frac{C}{2} - \frac{\alpha^2 y^2}{2},$$

oder:

$$\beta^2 x^2 = C - \alpha^2 y^2.$$

Weiss man nun, dass für $x = 0$, $y = \beta$ ist, so ergibt sich $C = \alpha^2 \beta^2$; es ist also die Gleichung der Curve:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2},$$

also die Ellipse, und in der That ist diese Aufgabe, wie man bemerkt haben wird, nur die Umkehrung des ersten bei der Tangentenmethode erwähnten Beispiels. Wenn man nun untersucht, ob dieses Verfahren etwas Richtiges liefern könne, und welches der Grund davon sei (Nieuwentiit giebt einen solchen nicht an), so erkennt man leicht, dass sich die Richtigkeit dieses Mechanismus auf dieselbe Weise darthun lässt, wie die in §. 3. erwähnte particuläre Lösung Newton's, die derselbe angab, um aus einer Fluxions- die Fluentengleichung abzuleiten. Die gesuchte Curvengleichung nämlich hat die Form: $f(x, y) = 0$. Da nun stets:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df(x, y)}{dx}}{\frac{df(x, y)}{dy}}$$

und die Subtangente $s = y \frac{dx}{dy}$ ist, so ist:

$$s = - \frac{\frac{df(x, y)}{dy}}{\frac{df(x, y)}{dx}} y,$$

Es ist also der Nenner $f = \frac{df(x, y)}{dx}$, der Zähler $g = y \frac{df(x, y)}{dy}$. Wird nun

der Nenner nach x integrirt, so werden, wenn $\frac{df(x, y)}{dx}$ eine algebraische

Function ist, und solche Fälle betrachtet Nieuwentiit nur, die Exponenten aller x um die Einheit vermehrt, und jedes Glied durch diesen Exponenten dividirt, es kommt also dasselbe heraus, wie bei der von Nieuwentiit

durch $\left(\frac{fx}{A}\right)$ angedeuteten Operation, nämlich das partielle Integral nach x ,

$$\int \frac{df(x, y)}{dx} dx. \text{ Ferner lautet der Zähler } g = - \frac{df(x, y)}{dy} y, \text{ und in ihm ist}$$

jedes Glied nur mit dem Exponenten von y zu dividiren, um daraus eben-

falls $f(x, y)$ abzuleiten. Denn um aus $\frac{df(x, y)}{dy}$ letzteres zu finden, haben

wir nach y zu integriren, d. h. alle Exponenten von y um die Einheit zu erhöhen und dann durch diese Exponenten zu dividiren. Da nun aber daher

Zähler g nicht bloss $\frac{df(x, y)}{dy}$, sondern dasselbe bereits mit y multiplicirt, der

die Exponenten in erhöhtem Zustande enthält, so ist bloss noch eine Division nothwendig, daher denn die mit dem Zähler vorzunehmende Opera-

tion nur durch $\left(\frac{g}{B}\right)$, nicht durch $\left(\frac{gy}{B}\right)$ bezeichnet werden musste. Man

erhält also durch Nieuwentiit's Verfahren eine Gleichung von der Art:

$$\int \frac{df(x, y)}{dx} dx = - \int \frac{df(x, y)}{dy} dy, \text{ oder } \int \frac{df(x, y)}{dx} dx + \int \frac{df(x, y)}{dy} dy = const.,$$

also die gesuchte Curvengleichung $f(x, y) = 0$, vorausgesetzt, dass der partielle

Differenzialquotient $\frac{df(x, y)}{dx}$ nur eine Function von x , $\frac{df(x, y)}{dy}$ nur

eine Function von y sei. Ist dies nicht der Fall, so liefert Nieuwentiit's

Verfahren ebenso wie das in §. 3. dargestellte von Newton angegebene nur

dann etwas Richtiges, wenn $\frac{df(x, y)}{dx}$ und $\frac{df(x, y)}{dy}$ ausser reinen Function-

nen von x und y noch partielle Differenzialquotienten von denselben Functionen beider Veränderlichen x und y , bezüglich nach x und y enthalten. Zugleich aber sind dann die durch Nieuwentijt's Verfahren aus dem Zähler und Nenner hervorgehenden Glieder, die gleich sind, nur einmal zu schreiben, eine Bemerkung, die Newton nicht entgangen ist, während Nieuwentijt sie übergeht.

Die Flächen auszumitteln war ihm nur bei parabolischen Curven möglich, und zwar verfuhr er auf folgende Weise. Es sei (Fig. 41) die Gleichung einer solchen: $y = x^{\frac{p}{q}}$ oder $y^q = x^p$, die Subtangente heiße s , der unendlich kleine Theil $M_1M_2 = P_1Q$ der Abscisse werde durch e , P_2Q durch a bezeichnet. Nun verhält sich:

$$s : y = e : a.$$

Es entsteht also die Gleichung: $y \cdot e = s \cdot a$.

Es bedeutet aber ye nichts Anderes als die Fläche des Trapezes $M_1M_2P_2P_1$; denn dieselbe ist eigentlich $\frac{(2y+a)e}{2}$, aber, da das Product ae zweier quantitates infinitesimae für 0 zu halten ist, wird daraus ye .

Wird jetzt $QC_1 = SM_1 = s$ gemacht, so bedeutet, wie man sich auf dieselbe Weise überzeugt, sa die Fläche des Trapezes P_2QCC_1 . Aus der Gleichung $y^q = x^p$ der Curve folgt nun: $qy^{q-1} \cdot a = px^{p-1} \cdot e$ oder, da aus der obigen Beziehung $ye = sa$ folgt: $e = \frac{s \cdot a}{y}$:

$$\text{Folglich wird: } s = \frac{qy^q}{px^{p-1}} = \frac{qx^p}{px^{p-1}} = \frac{q}{p} \cdot x.$$

Es ist also $s : SM_1 = QC_1 = \frac{q}{p} \cdot x$, oder, da $x = OM_1 = Q_1P_1$ ist, ist

$s = \frac{q}{p} \cdot Q_1P_1$ und folglich $s \cdot a = \frac{q}{p} xa = \frac{q}{p} \cdot Q_1P_1 \cdot a$. Das Product $QP_1 \cdot a$ aber bedeutet nur die Fläche des Trapezes $Q_1P_1P_2Q_2$. Es ist mithin:

$$\text{omn. } sa = \frac{q}{p} \text{ omn. } xa = \frac{q}{p} \times \text{omn. trapez } Q_1P_1P_2Q_2.$$

Die Gesammtheit der Trapeze $Q_1P_1P_2Q_2$ aber bildet die dreieckartige Fläche OQ_1P_1 ; also ist;

$$\text{omn. } sa = \frac{q}{p} \text{ omn. } xa = \frac{q}{p} \text{ der Fläche } OQ_1P_1.$$

Nun ist: $\text{omn. } ye = \text{Fläche } OM_1P_1$, $\text{omn. } xa = \text{Fläche } OQ_1P_1$

und daher: $omn. ye + omn. xa = \text{Rechteck } OM_1 P_1 Q_1 = xy.$

Da nun $ye = sa$, und $sa = \frac{q}{p} xa$ war, haben wir also:

$$\frac{q}{p} \cdot omn. xa + omn. xa = xy,$$

oder: $\frac{p+q}{p} \cdot omn. xa = xy;$

mithin: $omn. xa = \frac{p}{p+q} \cdot xy,$

d. h.: Fläche $OM_1 P_1 = \frac{p}{p+q} \cdot \text{Rechteck } OM_1 P_1 Q_1$

und zugleich: $omn. y \cdot e = \frac{q}{q+p} \cdot xy,$

d. h.: Fläche $OQ_1 P_1 = \frac{q}{p+q} \cdot \text{Rechteck } OM_1 P_1 Q_1.$

Alle übrigen Flächen bestimmt Nieuwentiit, wie Newton, entweder durch Vergleichung mit bekannten, oder durch Entwicklung der Curvengleichung in Reihen. Dagegen bestimmt er richtiger als Newton die Flexionspunkte der Curven, nämlich auf folgende Weise: Eine Gerade berührt eine Curve dann, wenn beide einen unendlich kleinen Theil, eine *quantitas infinitesima* gemeinsam haben. Es hat also, wenn (Fig. 42) $S_1 P_1$ eine Tangente ist, dieselbe mit der Curve $OP_1 P_2$ die kleine Linie $P_1 P_2$ gemeinschaftlich. Wird nun im Punkte P_2 eine Tangente $S_2 P_2$ gezogen, so ist dieselbe, wenn die Curve $OP_1 P_2$ concav gegen die Abscissenachse $OM_1 M_2$ ist, grösser, wenn sie convex ist, kleiner als $S_1 P_1$. Wird daher $P_2 R = S_1 P_1$ gemacht, so ist $S_2 R$ die Differenz der beiden Tangenten $S_1 P_1$ und $S_2 P_2$. Bezeichnen wir wieder die Abscisse OM_1 durch x , die Ordinate $M_1 P_1$ durch y , $M_1 M_2$ durch e , $Q_2 P_2$ durch a , $S_1 M_1$ durch s_1 , $S_2 M_2$ durch s_2 , $S_1 S_2$ durch p , so ist:

$$M_2 S_2 = e + s_1 + p \text{ in einer concaven,}$$

$$M_2 S_2 = e + s_1 - p \text{ in einer convezen Curve.}$$

Dieses Criterium lässt sich noch anders ausdrücken. Nehmen wir nämlich $P_2 C_2 \parallel S_2 M_2$, $QC_1 \parallel M_1 S_1$, so dass $L_1 C_2 = P_2 S_2 - QC_1 = M_2 S_2 - M_1 S_1 = e + p$ in einer concaven, $= e - p$ in einer convexen Curve wird, und ziehen durch die Punkte C_1, C_2 , eine Gerade, die die Ordinate $M_1 P_1$ in T_1 trifft, so entsteht die Proportion:

$$T_1 Q : QC_1 = C_1 L_1 : L_1 C_2,$$

oder, wenn wir $T_1 Q$ durch t_1 bezeichnen:

$$t_1 : s_1 = a : e + p;$$

folglich:

$$s_1 a = t_1 (e + p) \text{ für eine concave,}$$

$$s_1 a = t_1 (e - p) \text{ für eine convexe Curve.}$$

Da sich zugleich aber $s_1 : y = e : a$ verhält, also $s_1 a = ye$ ist, so haben wir:

$$ye = t_1 (e \pm p)$$

oder:

$$ye = t_1 e \pm t_1 p.$$

Es ist also:

$$t_1 < y \text{ bei einer concaven,}$$

$$t_2 > y \text{ bei einer convexen Curve.}$$

Dies Criterium lässt sich nun noch anders ausdrücken. Errichten wir nämlich $M_1 D_1 = QC_1$ senkrecht zur Abscissenachse, ebenso $M_2 D_2 = P_2 C_2$, so wird $L_2 D_2 = L_1 C_2 = e \pm p$; wird nun $D_2 D_1 T_2$ gezogen und $M_1 T_2$ durch t_2 bezeichnet, so entsteht die Proportion:

$$t_2 : s_1 = e : e \pm p$$

oder:

$$s_1 e = t_2 (e \pm p).$$

Es ist also:

$$t_2 < s_1 \text{ in einer concaven,}$$

$$t_2 > s_1 \text{ in einer convexen Curve.}$$

Ein Flexionspunkt findet also dann statt, wenn $t_2 = s_1$ ist. Sehen wir zu, was dies bedeute. Offenbar ist e das Differenzial der Abscisse,

also dx , $e \pm p$ das Differenzial der Subtangente, also, da diese $y \frac{dx}{dy}$ ist,

ist $e \pm p = d\left(y \frac{dx}{dy}\right)$. Nun lässt sich also die Gleichung $s_1 e = t_2 (e \pm p)$

so schreiben:

$$y \frac{dx}{dy} \cdot dx = t_2 \cdot d\left(y \frac{dx}{dy}\right);$$

folglich ist:

$$t_2 = \frac{y \left(\frac{dx}{dy}\right) dx}{d\left(y \frac{dx}{dy}\right)} = \frac{y \frac{dx}{dy}}{d\left(y \frac{dx}{dy}\right)} \cdot dx$$

Es besteht also das von Nieuwentiit aufgestellte Criterium des Flexionspunkts darin, dass $t_2 = s_1$ ist, d. h. dass

$$\frac{y \frac{dx}{dy}}{d\left(y \frac{dx}{dy}\right)} = y \frac{dx}{dy};$$

also:

$$\frac{d\left(y \frac{dx}{dy}\right)}{dx} = 1$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} + y \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 1,$$

oder:

$$-y \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

ist. Es muss mithin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

sein; wir sehen also, dass dieses Criterium mit dem von Leibniz aufgestellten völlig übereinstimmt.

Die Bestimmung der Maxima und Minima hingegen gelang ihm wieder durchaus nicht. Fassen wir nun Alles über ihn Gesagte zusammen, so sehen wir, dass Nieuwentiit's Versuch, eine Rechnung aufzustellen, die dasselbe leiste wie die Leibnizische Theorie des Unendlichkleinen, und doch von den Mängeln frei sei, an denen dieselbe litt, im Ganzen ein misslunger zu nennen ist. Denn einmal beraubte er sich durch das Nichteingehen auf die Differenziale höherer Ordnungen des Mittels, manche Aufgaben, wie die der Bestimmung der Maxima und Minima, zu lösen, oder er erschwerte sie sich wenigstens sehr, wie bei der Untersuchung der Flexionspunkte; sodann aber bemerkte schon Leibniz sehr richtig, dass ja die Schwierigkeiten beim Begründen der Rechnung mit Differenzialien erster Ordnung ganz dieselben seien wie bei der Anwendung der höheren. Denn wer einmal Nieuwentiit zugegeben hat, dass das Product zweier quantitates infinitesimae ein „nihil“ sei, der wird sich wohl auch nicht scheuen, dasselbe vom zweiten Differenzial im Vergleich mit dem ersten einzuräumen. Zugleich aber ging er auch des grossen Vortheils des Algorithmus verlustig, indem er sich mehr der Newton'schen Methode zuwandte, wodurch es denn kam, dass sein Werk der im folgenden Jahre erscheinenden Differenzialrechnung vom Marquis de l'Hospital gegenüber sehr bald in gänzliche Vergessenheit gerieth, die es wenigstens in solchem Masse gewiss nicht verdient hat, denn das Streben nach Gründlichkeit in demselben ist wenigstens grösser als in der von de l'Hospital angewandten Theorie des Leibnizischen Unendlichkleinen.

§. 11.

Die wichtigsten Sätze Taylor's.

Während, wie wir gesehen haben, einige der Englischen Mathematiker, wie Raphson, Maclaurin die Newton'sche Lehre der Fluxionen fester zu begründen und zu vervollkommen strebten, suchte Brook Taylor (1685 — 1731) die Lehre der endlichen Incremente auszubilden*), indem er sehr richtig urtheilte, dass da das Verhältniss der Fluxionen dasselbe sei, wie das der Incremente im Zustande des Verschwindens, sich die Theorie der ersteren aus der der letzteren müsse ableiten lassen. Mit dieser Ansicht aber tritt offenbar Taylor dem Principe der Leibnizischen Differenzialrechnung bei, welches, wie in §. 8. gezeigt worden ist, ein rein arithmetisches war, denn es ist dort gezeigt worden, dass die arithmetische Progression der Grundgedanke Leibnizens ist. Von den phoronomischen Sätzen, die das Fundament von Newton's Fluxionsrechnung bilden, findet sich bei Taylor keine Spur, ja es wird kaum in der Einleitung, und da nur oberflächlich, gewissermaassen als überflüssig, die Definition von „Fluxion“ gegeben. Wir haben daher sein Verfahren, da seine Annäherung an Newton lediglich in äusserlichen Dingen, in Bezeichnung namentlich, besteht, in die Entwicklungsgeschichte der Differenzialrechnung setzen zu müssen geglaubt.

Taylor berücksichtigt also ganz vorzüglich die endlichen Differenzen, oder, wie er sie nennt, Incremente. Dieselben bezeichnet er durch Hinzusetzen von Punkten unten an die Buchstaben, so dass das erste Increment von x bezeichnet wird durch $x\cdot$, das zweite durch $x\cdot\cdot$, das dritte durch $x\cdot\cdot\cdot$ u. s. w., worunter also dasselbe zu verstehen ist, wie bezüglich unter Δx , $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, u. s. w. Taylor giebt daher zunächst die Art und Weise an, wie diese Incremente gebildet werden, dass die Veränderliche um das Increment vermehrt und sodann der ursprüngliche Werth abgezogen werde. Es wird mithin aus einer gegebenen, drei Veränderliche x, y, z enthaltenden Gleichung, z. B.

$x^2 - 3xy + 3xz - yz - y^2 + z^2 + a = 0$,
indem zuerst $x + x\cdot$, $y + y\cdot$, $z + z\cdot$ für x, y, z gesetzt und dann die gegebene Gleichung abgezogen wird, die Incrementengleichung gebildet:

*) Brook Taylor: „Methodus incrementorum directa et inversa.“ 1717.

$$2x\dot{x} + \dot{x}^2 - 3xy - 3\dot{x}y - 3x\dot{y} + 3xz + 3x\dot{z} + 3x\ddot{z} - y\dot{z} - y\ddot{z} - y\dot{z} - 2y\dot{y} - y^2 + 2z\dot{z} + \dot{z}^2 = 0.$$

Dividiren wir diese ganze Gleichung durch ein Increment, z. B. durch $\dot{x}$, nehmen die Incremente sehr klein, oder mit andern Worten, setzen die Momente Newton's an ihre Stelle, so können wir, an deren Stelle, da ihre Verhältnisse dieselben sind, wie die der Fluxionen, auch die Fluxionen an ihre Stelle setzen. So folgt aus der aufgestellten Incrementengleichung zunächst:

$$2x + \dot{x} - 3x\frac{y}{x} - 3y - 3\dot{y} + 3x\frac{\dot{z}}{x} + 3z + 3\dot{z} - y\frac{\dot{z}}{x} - z\frac{y}{x} - y\frac{\dot{z}}{x} - 2y\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} + 2z\frac{\dot{z}}{x} + \frac{\dot{z}^2}{x} = 0.$$

Gewöhnlich nimmt nun Taylor ein Increment, z. B. $\dot{x}$ als Einheit an, so dass dasselbe als Factor oder Divisor nicht geschrieben wird. Lassen wir nun in unsrer Formel die Incremente in die Momente übergehn, also sich annulliren, so können wir für $\frac{y}{x}$, $\frac{\dot{z}}{x}$, die Quotienten der Fluxionen, $\frac{y}{x}$, $\frac{\dot{z}}{x}$, setzen, und erhalten so die Fluxionsgleichung. Indem nun Taylor auch die Bildung der höheren Incremente untersucht, zunächst $x + \dot{x}$ für x , dann in $x + \dot{x}$ wieder $x + \dot{x}$ an die Stelle von x setzend, so dass der zweite Werth von x wird $x + 2\dot{x} + \dot{x}$, u. s. w., konnte es ihm nicht entgehn, dass die Coefficienten, die sich bei dieser Operation ergeben, die Binomialcoefficienten sind.

Nach diesen und ähnlichen Sätzen geht nun Taylor über zur Lösung von Aufgaben, die sich auf die Lehre der endlichen Incremente beziehen. Da dieselben jedoch nur mittelbar in die Differenzialrechnung gehören, indem ja die Differenzenrechnung für sich einen eigenen Theil der Mathematik ausmacht, so sollen nur einige hierauf bezügliche Sätze Taylor's, die derselbe jedoch alle ohne Beweis aufstellte, angeführt werden. Zunächst sei folgende Aufgabe gestellt. Es sei eine Gleichung gegeben zwischen einer Variabeln x und mehreren Incrementen der anderen Variabeln z , es sollen nun alle Werthe von z (also in geometrischem Sinne, die Ordinaten einer Curve) gefunden werden; zugleich sei noch bekannt, dass, wenn x den Werth A hat, $z = B$ ist und man kenne die an dieser Stelle statt-

habenden Werthe der Incremente von z bis zu dem Incremente derjenigen Ordnung, welche die zunächst unter der höchsten der gegebenen Gleichung stehende ist. Wir bezeichnen den Werth des ersten Increments erster Ordnung von z an der Stelle $z = B$ durch B_1 , den des Increments zweiter Ordnung durch B_2 u. s. w. Nun ist offenbar unsre Aufgabe dann gelöst, wenn wir die Werthe der Incremente von z , also $z_1; z_2; z_3; \dots$ bis zum Incremente der höchsten vorliegenden Ordnung kennen, denn aus ihnen lässt sich dann leicht der Werth von z selbst ableiten. Es sei z. B. gegeben die Gleichung:

$$x^2z - xz + z = 0;$$

und es ist also bekannt, dass für $x = A, z = B_1; z = B_2; z = B_3; \dots; z = B_6$ ist; gesucht wird also $B_7; B_8; B_9$ u. s. w. Aus der gegebenen Gleichung folgt nun: $z = xz - x^2z$;

und wenn wir zu den Increments übergehen:

$$z = xz + xz + xz - x^2z - 2xxz - 2xxz - x^2z - x^2z.$$

Von hier aus kann man nun z finden, und zwar, indem man überall, wo z oder z vorkommt, ihre Werthe aus den letzten beiden Gleichungen einsetzt, ausgedrückt durch $z_1, z_2; \dots; z_6$; und so werden alle folgenden Incremente z u. s. w. durch dieselben vorigen ausgedrückt, erhalten. Es lassen sich mithin, da $B_1, B_2, B_3, \dots, B_6$ bekannt sind, die Incremente $B_7; B_8; B_9; \dots$ finden. Denn aus der ersten unsrer beiden Gleichungen ergibt sich, wenn wir $x = A$, also $z = B$ setzen: $B_7 = AB - A^2B$.

Aus der zweiten wird, wenn wir das Increment von x für den Werth A als constant und zwar als Einheit annehmen:

$$B_8 = AB + B + B - AB - 2AB - 2AB - B - B;$$

$$\text{oder } B_8 = (A + 1)B - (A + 2)AB - (2A + 1)B;$$

u. s. w.

Eine fernere Aufgabe ist folgende: Zu untersuchen, wie viel Bedingungen hinreichend seien, damit in zwei Gleichungen mit drei Veränderlichen x, y, z , und einigen ihrer Incremente, wenn von der einen, z. B. von x alle Incremente bekannt sind, auch die der übrigen beiden Verän-

derlichen y und z sämmtlich gefunden werden können. Es sei nun das niedrigste Increment von y , welches in den gegebenen Gleichungen vorkommt, y , das niedrigste von z sei z ; ferner sei das höchste Increment y in der ersten Gleichung y , in der zweiten y , das höchste Increment von z in der ersten Gleichung z , in der zweiten z . Diess vor-

ausgesetzt, stellt Taylor folgenden Satz auf als Auflösung seiner Aufgabe: Man eliminire aus den zwei gegebenen Gleichungen, die eine Variable, z. B. z mit ihren Incrementen, so bleibt eine Gleichung zwischen den übrigen beiden Variabelen x und y und ihren Incrementen übrig. Taylor behauptet nun, dass in diesen dasjenige Increment von y , welches in der Ordnung $p + m$ ist, das höchste sei, wenn durch m die grössere der beiden Zahlen $r + \sigma$; $q + s$ bezeichnet werde. Es lassen sich also, wenn die Werthe von y bis zu y bekannt sind, deren Zahl m ist, sämmtliche

Werthe von z finden. Um diesen von Taylor aufgestellten Satz zu untersuchen, müssen wir zunächst fragen, ob die Elimination der dritten Variable z möglich sei, und auf welche Weise. Es mag diess gleich an einem Beispiele gezeigt werden. Gegeben seien die Gleichungen:

$$xy - z - xz = 0; \quad 1)$$

$$x^2z + xz - x^3z + y = 0. \quad 2)$$

Um nun z mit seinen Incrementen zu eliminiren, nehmen wir die Incremente von der zweiten Gleichung, so erhalten wir eine Formel, in der z, z, z, z vorkommen und die wir deswegen bezeichnen wollen durch

$$f(z, z, z, z) = 0. \quad 3)$$

Auf diese Weise haben wir zwar eine Gleichung mehr gewonnen, aber es ist auch die Zahl der zu eliminirenden Grössen um eine gewachsen, indem z hinzugekommen ist, welches in den gegebenen Gleichungen 1) und 2) nicht war. Nehmen wir aber nun die Incremente der Gleichungen 1) und 3), so entsteht aus 1) eine Gleichung:

$$\varphi(z, z, z, z) = 0; \quad 4)$$

in der z das höchste Increment ist, aus 3) eine Gleichung:

$$\psi(z, z, z, z, z) = 0; \quad 5)$$

in der ebenfalls z das höchste Increment ist. Wir haben also jetzt 5 zu eliminirende Grössen, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 und auch fünf Gleichungen. Die Elimination ist also möglich. Betrachten wir nun den Fall allgemein und nehmen an, in der ersten der gegebenen Gleichungen sei das höchste Increment der zu eliminirenden Grösse z , in der zweiten z , und es sei der ungünstigste Fall vorhanden, nämlich in der Gleichung 1) seien alle Incremente bis zu z , in 2) alle bis zu z vorhanden, so nehme man zunächst, wenn $\nu < \mu$ ist, die Incremente der zweiten Gleichung; dadurch kommen die Incremente $z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, \dots, z_{\mu-1}, z_\mu$; so haben wir jetzt ausser den gegebenen 2 Gleichungen noch $\mu - \nu$ neue hinzu erhalten, haben also im Ganzen $\mu - \nu + 2$ Gleichungen, aus denen die Incremente $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ und z selbst, mithin $\mu + 1$ Grössen zu eliminiren sind. Indem wir nun in der ersten der ursprünglichen und in der letzten der aus der zweiten gegebenen Gleichung abgeleiteten, die beide z als höchstes Increment enthalten, wieder zu den Incrementen übergehn, erhalten wir zwei neue Gleichungen, während wir nur eine zu eliminirende Grösse z mehr erhalten, u. s. w. Wir haben also

für $\mu + 1$ zu eliminirende Grössen $\mu - \nu + 2$ Gleichungen.

„ $\mu + 2$ „ „ „ $\mu - \nu + 4$ „

„ $\mu + 3$ „ „ „ $\mu - \nu + 6$ „

„ $\mu + n$ „ „ „ $\mu - \nu + 2n$ „

Indem wir so fortschreiten, kommen wir jedenfalls einmal zu einem Werth n' von n , für den $\mu - \nu + 2n' = \mu + n'$ ist, diess tritt offenbar ein, wenn $n' = \nu$, und dann kann die Elimination der $\mu + \nu$ Grössen vollzogen werden. Diess ist jedoch die höchste Zahl der Gleichungen, die nöthig ist; in dem oben angeführten Beispiele, wo die Variable z selbst nicht vorhanden war, reichten schon 5 Gleichungen zur Elimination hin. Nachdem so die Möglichkeit und zugleich die Art und Weise gezeigt worden ist, wie eine Variable mit allen ihren Incrementen eliminirt werden kann, untersuchen wir Taylor's Behauptung, dass, wenn also in den gegebenen bei-

den Gleichungen y , z die niedrigsten; y , z in der einen, y , z in der anderen Gleichung die höchsten Incremente von y und z , und wenn m die grössere der beiden Zahlen $r + \sigma$, $q + s$ bedeutet, das höchste Increment sei, bis zu welchem man Behufs der Elimination von z nebst seinen Incrementen fortschreiten müsse. Wir unterscheiden nun 4 Fälle:

- I) $r + \sigma > q + s$ II) $q + s > r + \sigma$
 1) $q > \sigma$; 1) $\sigma > q$;
 2) $q < \sigma$; 2) $\sigma < q$.

Im Falle I) 1), wenn $q > \sigma$, müssen also zunächst die Incremente der Gleichung, in der z das höchste Increment ist, genommen werden.

Indem nun hierin zugleich y das höchste Increment von y war, so steigt durch je einmaliges Uebergehen zum Increment, der Index von y um die Einheit; haben wir also $(q - \sigma)$ mal die Incremente genommen, so ist der höchste Index von y , y in der andern Gleichung in der das höchste jetzige Increment von z , nämlich z bereits enthalten war, ist das höchste Increment von y noch y . Indem nun der Annahme nach

folglich $r + \sigma > q + s$,
 $r > q + s - \sigma$
 ist, ist y noch von einer höheren Ordnung als y . Fahren wir nun fort, jetzt von beiden Gleichungen die Incremente nehmend, so

haben wir die Zahl n zu suchen, die angiebt, wie viele Incremente noch zu nehmen seien. Wir haben also jetzt alle Incremente von z bis z , mithin $q + 1$ an Anzahl in unsren Gleichungen. Die Zahl der Gleichung aber ist $q - \sigma + 2$. Um nun zu wissen, wie vielmal man dann noch zu den Incrementen überzugehn hat, bezeichnen wir die unbekannte Anzahl mit n ; diese muss offenbar so beschaffen sein, dass dann die Anzahl der zu eliminirenden Grössen der der Gleichungen gleich ist, dass also die Gleichung gilt:

$q + 1 + n = q - \sigma + 2 + 2n$,
 woraus folgt: $n = \sigma - 1$.

Es ist also das höchste Increment von y , y , oder, da $r + \sigma = m$

ist, y_{p+m-1} . Im Falle I) 2) hat man, nachdem man $(\sigma - \varrho)$ mal die Incremente der einen Gleichung genommen hat, in der einen als höchstes Increment von y , $y_{p+r+\sigma-\varrho}$, in der andern y_{p+s} , und da der Voraussetzung nach $r + \sigma - \varrho > s$, ist $y_{p+r+\sigma-\varrho}$ ein höheres Increment als y_{p+s} . Um nun n hier zu finden, haben wir die Gleichung:

$$\sigma + 1 + n = \sigma - \varrho + 2 + 2n$$

also

$$n = \varrho - 1$$

mithin als höchstes Increment

$$y_{p+r+\sigma-\varrho+(\varrho-1)} = y_{p+r+\sigma-1} = y_{p+m-1}$$

Im Falle II) 1) ist, nachdem man $(\varrho - \sigma)$ mal in der einen Gleichung zu den Incrementen übergegangen ist, in der einen $y_{p+s+\varrho-\sigma}$, in der andern y_{p+s} die höchste Ordnung, und zwar ist, da $s + \varrho - \sigma > r$, das erstere das höhere. Aus der Gleichung

$$\varrho + 1 + n = \varrho - \sigma + 2 + 2n$$

folgt nun:

$$n = \sigma - 1$$

mithin ist das höchste Increment

$$y_{p+s+\varrho-1} = y_{p+m-1}$$

Falle II) 2) erhält man ebenfalls y_{p+m-1} als höchstes Increment; es gilt

diess also für alle Fälle. Es müssen daher offenbar zur Eliminirung oder Bestimmung aller Incremente von z an die Werthe y bis zu y_{p+m-1} , an Zahl also m , gegeben sein. Ist diess aber der Fall, so können sämtliche Incremente von y und z , von y_{p+m} und z_q an, gefunden werden; die von y mit Hülfe des ersten Satzes, die von z mit Hülfe der auf diese Weise berechneten Incremente von y .

Diess setzt voraus, dass in keiner der beiden gegebenen Gleichungen z selbst vorkommt. Ist diess der Fall, so wird auch das Verhältniss, in dem die Anzahl der Unbekannten oder zu eliminirenden Grössen mit dem Bilden neuer Incrementengleichungen steht, ein andres, indem man dann zugleich die ebenfalls zu eliminirenden Incremente $z_1, z_2, z_3, \dots, z_q$ mit erhält; bis dahin führen je 2 aus den beiden Gleichungen abgeleitete neue eine Vermehrung der Unbekannten um zwei mit sich, so lange also ist eine Elimination unmöglich. Erst dann, wenn sich gewissermaassen die

Lücke zwischen $\bar{z}$ und z ausgefüllt hat, wächst die Zahl der Unbekannten, indem man aus beiden Gleichungen immer weitere Incrementengleichungen ableitet, stets um eine; und ihre Zahl ist der der Gleichungen gleich, mithin die Elimination möglich, wenn das höchste Increment von y , y_{p+q+m} ist; diess gilt, das z mag in der ersten, der zweiten oder beiden Gleichungen stehen. Es ist dabei angenommen, dass auch z selbst gesucht werden solle. Sollen bloss die Incremente gesucht werden, so ist diess möglich, wenn $y_{p+q+m-1}$ das höchste Increment von y bekannt ist.

Nach der Aufstellung solcher Sätze, wie sie im Vorhergehenden erwähnt worden sind, wendet sich nun Taylor zur Theorie der Reihen; und zwar stellt er sich zunächst folgende Aufgabe: Es seien zwei Veränderliche x und y gegeben, deren letztere von der ersten abhängt; nun wachse x bis zu $x+nx$, und es werde $nx = u$; $(n-1)x = \dot{u}$; $(n-2)x = \ddot{u}$; etc. bezeichnet; gesucht wird der Werth, den y hat, wenn x bis zu $x+nx$ gewachsen ist. Nun ist offenbar, wenn x auf $x+x$ gewachsen ist, der Werth von y , $y+y$, wenn x auf $x+2x$ gewachsen ist, $y+2y+y$, dann folgt $y+3y+3y+y$. Die Coefficienten der successiven Incremente von y

sind nun, wie Taylor vorher bewiesen hat, die Binomialcoefficienten; es ist also der Werth von y , wenn x bis zu $x+nx$ zugenommen hat,

$$y + \frac{n}{1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y + \dots$$

Nun war aber $nx = u$, $(n-1)x = \dot{u}$ u. s. w., folglich ist, da $n = \frac{nx}{x} = \frac{u}{x}$; $n-1 = \frac{(n-1)x}{x} = \frac{\dot{u}}{x}$;

$n-2 = \frac{(n-2)x}{x} = \frac{\ddot{u}}{x}$; u. s. w. ist, für $x+u$ der Werth von y :

$$y + \frac{u}{1} \cdot \frac{y}{x} + \frac{u \cdot \dot{u}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{u \cdot \dot{u} \cdot \ddot{u}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y}{x^3} + \dots$$

und ebenso hat y , wenn x von x bis zu $x-u$ abgenommen hat, den Werth:

$$y - \frac{u}{1} \cdot \frac{y}{x} + \frac{u \cdot \dot{u}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y}{x^2} - \frac{u \cdot \dot{u} \cdot \ddot{u}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y}{x^3} + \dots$$

Diess gilt für endliche Incremente, lassen wir dieselben aber verschwinden, so haben wir also an die Stelle der Incremente die Momente zu setzen, oder da hier nur Quotienten vorkommen, die Fluxionen. Lassen

wir auch die Incremente von x bis zu Null abnehmen, so wird $u = \dot{u} = \ddot{u} = \dots$, wir haben also, für ein x , welches bis zu $x + u$ zu- oder bis zu $x - u$ abgenommen hat, als zugehörigen Werth von y :

$$y + \frac{u}{1} \cdot \frac{y}{x} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y}{x^3} + \dots$$

und

$$y - \frac{u}{1} \cdot \frac{y}{x} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y}{x^2} - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y}{x^3} + \dots$$

In den Zeichen der Differenzialrechnung dargestellt, heisst diess, wenn $y = f(x)$ ist, nichts anderes, als es ist:

$$f(x + u) = f(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots$$

$$\text{und } f(x - u) = f(x) - \frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots$$

Man sieht sogleich, dass diess die Taylor'sche Reihe, eines der wichtigsten Theoreme, der höheren Mathematik, ist. Zugleich kehrt jetzt Taylor seinen Satz um, indem er zeigt, dass wenn eine Gleichung zwischen x und y nebst einigen Incrementen von y gegeben sei, jeder Werth von y mittelst einer unendlichen Reihe gefunden werden könne, wenn für einen speciellen Werth von x das zugehörige y nebst denjenigen Incrementen, die in der gegebenen Gleichung vorkommen, bekannt sind. Denn nach dem ersten der erwähnten Sätze können dann alle Incremente bis in das Unendliche gefunden werden. Ist nun für ein bestimmtes x das zugehörige y , y_1 , y_2 , y_3 , $\dots$ bekannt, so ist also für $x + u$ der Werth von y :

$$y + \frac{u}{1} \cdot \frac{y_1}{x} + \frac{u \dot{u}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y_2}{x^2} + \frac{u \cdot \dot{u} \cdot \ddot{u}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y_3}{x^3} + \dots$$

oder für unendlich kleine Incremente:

$$y + \frac{u}{1} \cdot \frac{y}{x} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y}{x^3} + \dots$$

welches die Taylor'sche Reihe wieder ist.

Taylor geht hierauf zum umgekehrten Problem über, die Fluente einer Fluxion zu finden. Es sei z. B. die Fluente von $y \dot{x}$ gesucht. Wir wollen sie auch hier, wie in §. 9. durch $f. y \dot{x}$ bezeichnen. Das Verfahren Taylor's ist nun der in §. 9. beschriebenen Methode Raphson's sehr ähnlich; er setzt nämlich, indem unter u eine noch unbestimmte Function von x und

y verstanden wird; $fl. y\dot{x} = xy + u$;
woraus folgt: $y\dot{x} = y\dot{x} + x\dot{y} + \dot{u}$;
mithin $\dot{u} = -x\dot{y}$, und daher $u = fl. x\dot{y}$. Wir haben also:

$$fl. y\dot{x} = xy - fl. x\dot{y};$$

Wird nun

$$fl. x\dot{y} = \dot{x}y + v$$

gesetzt, worin $\dot{x}$ die Fluente von x bezeichnet, so folgt:

$$x\dot{y} = x\dot{y} + \dot{x}y + \dot{v};$$

mithin ist $\dot{v} = -\dot{x}y$. und $v = -fl. \dot{x}y$, folglich wird

$$fl. y\dot{x} = xy - \dot{x}y + fl. \dot{x}y.$$

Wird nun $fl. \dot{x}y = \ddot{x}y + w$ gesetzt, w bestimmt, und auf diese Weise fortgefahen, so erhält man eine unendliche Reihe:

$$fl. y\dot{x} = xy - \dot{x}y + \ddot{x}y - \dots$$

oder, da $\dot{x} = \frac{x^2}{1.2}$; $\ddot{x} = \frac{x^3}{1.2.3}$; u. s. w. ist:

$$fl. y\dot{x} = \frac{x}{1} \cdot y - \frac{x^2}{1.2} \cdot y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot y - \dots$$

eine Reihe, die, wie im §. 9. gezeigt worden ist, nichts Anderes ist, als die Bernoulli'sche Reihe. Von einer Untersuchung der Con- oder Divergenz ist bei Taylor nirgends die Rede.

Hierauf sucht Taylor aus einer Gleichung, die zwei Variabele, x , y , nebst einigen Incrementen von y enthält, das y darzustellen und zwar in Form einer unendlichen Reihe, die nach Potenzen von x fortschreitet, der Art, dass die Exponenten dieser Potenzen von x eine arithmetische Reihe bilden. Es soll also die gesuchte Reihe für y die Form haben:

$$y = Ax^\alpha + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + Dx^{\alpha+3\beta} + \dots$$

Es handelt sich daher darum, die Coefficienten A , B , C , D , ... sowie das Anfangsglied α der arithmetischen Reihe und die constante Differenz β zu bestimmen. Zunächst nun bemerkt Taylor, dass, wenn diese Reihe für y in die gegebene Gleichung substituirt werde, mindestens zwei der so entstehenden Reihen so beschaffen sein müssen, dass ihre ersten Glieder dieselben Potenzen von x enthalten, eine Reihe aber mit einem grösseren oder kleineren Exponenten anfängt. Wir suchen diess zunächst zu beweisen, und zwar gleich an einem Beispiele. Die gegebene Gleichung, aus welcher y in eine Reihe zu verwandeln ist, sei:

$$1 + xy - x^2\ddot{y} - y = 0.$$

Wird hier für y die fragliche Reihe $Ax^\alpha + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \dots$ substituiert, so nimmt sie die Form an:

$$\left. \begin{aligned} &1 + Ax^\alpha + 1 + Bx^{\alpha+\beta} + 1 + Cx^{\alpha+2\beta} + 1 + \dots \\ &- \alpha A^2 x^{2\alpha+1} - [\alpha AB + (\alpha + \beta)AB]x^{2\alpha+\beta+1} \\ &- [\alpha AC + (\alpha + \beta)B^2 + (\alpha + 2\beta)AC]x^{2\alpha+2\beta+1} - \dots \\ &- \alpha(\alpha - 1)Ax^{\alpha-2} - (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)Bx^{\alpha+\beta-2} \\ &- (\alpha + 2\beta)(\alpha + 2\beta - 1)Cx^{\alpha+2\beta-2} - \dots \end{aligned} \right\} = 0; \text{ a)}$$

Da nun diese Gleichung für alle Werthe von x gelten muss, so würde hieraus folgen, dass auch $1 = 0$ sei, was widersinnig ist. Es kann also unter diesen Umständen die Reihe für y nicht aufgestellt werden. Nehmen wir aber mit Taylor an, die Exponenten der durch Substitution von $Ax^\alpha + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \dots$ erhaltenen Reihen seien Glieder einer und derselben arithmetischen Progression und es sei der Exponent bei zweien der erhaltenen Reihen derselbe, so gestaltet sich die Sache anders. Dann nämlich erhielten wir statt der Reihen in a) andere, von der Form:

$$\left. \begin{aligned} &1 + Ax^\gamma + Bx^{\gamma+\beta} + Cx^{\gamma+2\beta} + \dots \\ &+ \lambda Ax^\gamma + \mu Bx^{\gamma+\beta} + \gamma Cx^{\gamma+2\beta} - \dots \\ &- \varrho A^{\delta-p\beta} - \sigma B^{\delta-p-1\beta} - \dots - \tau \cdot M \cdot x^\delta - \xi \cdot N x^{\delta+\beta} - \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

wo also die erste und zweite Reihe mit demselben Exponenten von x beginnen, während die dritte mit $\delta - p\beta$ anfängt, alle aber Exponenten haben, die eine arithmetische Reihe mit derselben Differenz β bilden. Haben die erhaltenen Reihen nun diese Form, so lässt sich die Aufgabe lösen, denn die dritte Reihe wird, wenn auch nicht vom Anfange an, so doch gewiss von einem bestimmten Gliede an dieselben Potenzen von x zu Factoren haben, wie die ersten. Es lässt sich leicht berechnen, wann in der letzten Reihe ein Glied mit dem Exponenten γ erscheint; wir haben nur die Gleichung $\delta - \overline{p} - z\beta = \gamma$ nach z als Unbekannter aufzulösen, wodurch sich findet: $z = \frac{\gamma - \delta}{\beta} + p$. Da $\gamma - \delta$ Glieder derselben arith-

metischen Reihe mit der Differenz β sind, so ist $\frac{\gamma - \delta}{\beta}$ stets eine ganze Zahl. Indem sich nun ferner in der dritten Reihe jedenfalls ein Glied mit dem Exponenten 0, also dem Factor $x^0 = 1$ befindet, so kann eine widersinnige Forderung, wie $1 = 0$ nicht eintreten; die Aufgabe ist also löslich

und die Coefficienten $A, B, C, \dots$ bestimmen sich, indem man alle Glieder mit gleichen Potenzen von x vereinigt und die sich so ergebenden Factoren $= 0$ setzt. Soll demnach unser oben aufgestelltes specielles Beispiel löslich sein, so muss α so gewählt werden, dass zwei der Reihen in a) im Anfangsgliede denselben Exponenten haben. Welches Paar von den drei Reihen, die erste und zweite, die erste und dritte, die zweite und dritte, mit demselben Exponenten anfängt, das ist willkürlich; es lassen sich mithin im Allgemeinen drei Reihen für y finden, durch die die Aufgabe gelöst ist. Nehmen wir an, die zweite und dritte Reihe in a) sollten mit derselben Potenz von x beginnen, so ist α so zu wählen, dass $2\alpha + 1 = \alpha - 2$ ist; mithin muss $\alpha = -3$ gesetzt werden; der erste Exponent der zweiten und dritten Reihe wird dann $\alpha - 2 = -5$, der der ersten: $\alpha + 1 = -2$. Um nun β zu bestimmen, bedenke man, dass β ein gemeinsamer Divisor der Zahlen sein muss, welche man erhält, wenn man die ersten Exponenten der drei Reihen um α vermindert. Es muss also β ein gemeinsamer Theiler der Zahlen $+1; -2; -2$; sein. Da nun zugleich unsre Aufgabe nur dann löslich ist, wenn in den Reihen Glieder ohne eine Potenz von x als Factor vorkommen, so kann β nur $= 1$ sein. Setzen wir also in der Gleichung: $y = Ax^\alpha + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \dots$ $\alpha = -3$; $\beta = 1$, so nimmt sie die Form an:

$$y = Ax^{-3} + Bx^{-2} + Cx^{-1} + D + Ex + Fx^2 + Gx^3 + Hx^4 + \dots$$

in der nun noch die Coefficienten A, B, C, D , u. s. w. zu bestimmen sind. Wir haben nun zu dem Zwecke:

$$\dot{y} = -3Ax^{-4} - 2Bx^{-3} - Cx^{-2} + E + 2Fx + 3Gx^2 + 4Hx^3 + \dots$$

$$y\dot{y} = -3Ax^{-7} - 5ABx^{-6} - (4AB + 2B^2)x^{-5} - (3AD + 3BC)x^{-4} - (3AE + 2BD + C^2 + AE)x^{-3} - \dots$$

$$\text{folglich } x^2 y\dot{y} = -3Ax^{-5} - 5ABx^{-4} - (4AB + 2B^2)x^{-3} - (3AD + 3BC)x^{-2} - (3AE + 2BD + C^2 + AE)x^{-1} - \dots$$

$$\text{endlich } \ddot{y} = 12Ax^{-5} + 6Bx^{-4} + 2Cx^{-3} + 3Fx + 6Gx + \dots$$

Es geht also die Gleichung:

$$1 + xy - x^2 y\dot{y} - \ddot{y} = 0$$

über in die folgende:

$$\left. \begin{aligned} &9Ax^{-5} + (6 - 5A)Bx^{-4} + (2C - 4AB - 2B^2)x^{-3} + (A - 3AD - 3BC)x^{-2} \\ &+ (B - 4AE - 2BD - C^2)x^{-1} + (C + 2F + 1) + \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

Es entstehn also zur Bestimmung der Coefficienten $A, B, C, D \dots$ die Gleichungen :

$$\begin{aligned} 9A &= 0, & \text{folglich } A &= 0; \\ 6B - 5A &= 0; \text{ folglich, da } A \text{ schon } = 0 \text{ ist,} & B &= 0; \\ 2C - 5AB - 2B^2 &= 0; \text{ oder, da schon } A = B = 0 \text{ ist,} & C &= 0; \\ A - 3AD - 3BC &= 0; \text{ oder, da schon } A = B = C = 0 \text{ ist,} & D &\text{ beliebig;} \\ B - 4AE - 2BD - C^2 &= 0; \text{ also, da } A = B = C = 0 \text{ ist,} & E &\text{ beliebig;} \\ C + 2F + 1 &= 0; \text{ folglich, da } C = 0 \text{ ist,} & F &= -\frac{1}{2}; \\ D + 6G &= 0; \text{ folglich:} & G &= -\frac{D}{6}. \end{aligned}$$

u. s. w.

Es lautet also die verlangte Reihe für y :

$$y = D + Ex - \frac{1}{2}x^2 - \frac{D}{6}x^3 - \frac{E}{12}x^4 - \frac{1-2D+2E^2}{40}x^5 + \frac{D+3D^2+9E}{180}x^6 + \dots$$

worin D und E willkürlich angenommen werden können, so dass zugleich die gesuchte Reihe noch zwei Bedingungen erfüllen kann. — Wir hätten nun noch annehmen können, dass in der Gleichung a) die Exponenten der ersten Glieder der ersten und zweiten, oder der ersten und zweiten Reihen gleich seien. Im ersten dieser beiden Fälle hätten wir α zu bestimmen gehabt aus der Gleichung $\alpha + 1 = 2\alpha + 1$, woraus sich ergeben hätte $\alpha = 0$, der Exponent des ersten Gliedes der dritten Reihe wäre dann $= -2$, also auch $\beta = 2$ geworden. Im zweiten Falle wäre zu setzen gewesen $\alpha + 1 = \alpha - 2$, eine Gleichung, die zu erfüllen unmöglich ist. Es lässt sich daher unsre Aufgabe nur auf zwei Weisen lösen. Freilich aber bleibt, da die Lösung auf der Methode der unbestimmten Coefficienten beruht, die wichtige Frage nach der Con- oder Divergenz der erhaltenen Reihe unbeantwortet. Auf den im Obigen gegebenen Beweis gründet sich offenbar die geometrische Betrachtung, die Taylor anknüpft. Alle Exponenten der ersten Glieder der Reihen in a) haben nämlich die Form $b\beta + c$, $b'\beta + c'$, $b''\beta + c''$, u. s. w., indem sie Glieder derselben arithmetischen Progression sind. Um nun β zu finden, trage man in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme die Länge b als Abscisse ab (Fig. 43), und errichte c als Ordinate, so dass $OM = b$, $MP = c$ ist. Ebenso werde $OM' = b'$, $M'P' = c'$, $OM'' = b''$, $M''P'' = c''$, u. s. w. gemacht. Nun werde durch P und P' eine Gerade gezogen, die die Ordinatenachse in S trifft; zu ihr parallel ziehe man durch die übrigen Punkte, z. B. P'' Gerade, $P''R$ u. s. w. Indem nun zwei

dieser Exponenten $b\beta + c$, $b'\beta + c'$, $b''\beta + c''$, etc., z. B. $b\beta + c$ und $b'\beta + c'$ gleich sein müssen, haben wir also die Gleichung $b\beta + c = b'\beta + c'$; woraus folgt: $\beta = \frac{c - c'}{b' - b}$, oder da $c = MP$, $c' = M'P'$, also $c - c' = PT$, und $b' - b = OM' - OM = MM' = TP'$ ist: $\beta = \frac{PT}{P'T}$. Es ist also der Werth von $b\beta + c = b'\beta + c' = OM \cdot \frac{PT}{P'T} + MP$; der Werth des Exponenten $b''\beta + c''$ ist $= OM'' \frac{PT}{P'T} + M''P''$. Es bedeutet nun aber $OM \frac{PT}{P'T}$ nichts anderes als die vierte Proportionale zu OM , PT , $P'T$, d. h. die Linie US , mithin bedeutet $OM \frac{PT}{P'T} + MP$ die Linie OS , ebenso bezeichnet $OM'' \frac{PT}{P'T} + M''P''$ die Linie OR . Da nun nach dem oben Gesagten die Aufgabe nur gelöst werden kann, wenn der den Anfangsgliedern zweier Reihen in a) gemeinschaftliche Exponent der grösste oder kleinste von allen ist, so ist offenbar, dass die Linie OS grösser oder kleiner als alle übrigen, z. B. OR sein muss; und umgekehrt giebt die Lage der Punkte R ein Criterium für die Löslichkeit der Aufgabe. Soll dieselbe möglich sein, so müssen alle R über oder unter S liegen, liegt ein Theil über, ein anderer unter S , so ist die Aufgabe unlöslich.

Wie man sieht, schliesst sich Taylor in solchen Problemen, wie das letzterwähnte, an Newton, an; die Grundlage aber seines Werkes im Ganzen sowohl, als des wichtigsten von ihm aufgestellten Theorems, der Taylor'schen Reihe, dessen Bedeutung er freilich wahrscheinlich selbst noch nicht erkannte, bildet die Theorie der endlichen Differenzen *), es ist also das-

*) Da Taylor's Werk ziemlich schwer verständlich ist, indem derselbe seine Sätze ohne Beweis, höchstens mit Andeutungen desselben aufstellte, so stellte Nicole in einem Aufsatz: „*Traité des differences finies*“, der sich in der „*histoire de l'académie royale des sciences*. 1717. Avec les mémoires de Mathématique et Physique pour la même année. Paris 1719“ findet, die Principien der Rechnung mit endlichen Differenzen verständlicher dar und fügte neue Sätze hinzu. So stellte er z. B. folgende Theoreme auf:

$$\Delta [x(x+n)(x+2n) \dots (x+m-1n)] = mn(x+n)(x+2n) \dots (x+m-1n);$$

$$\Delta \left[\frac{1}{x(x+n)(x+2n) \dots (x+m-1n)} \right] = \frac{mn}{x(x+n)(x+2n) \dots (x+mn)};$$

und umgekehrt:

selbe, was, wie oben schon bemerkt wurde, Leibnizen zur Entdeckung der Differenzialrechnung führte.

§. 12.

Euler's Begründung der Differenzialrechnung.

In vieler Beziehung ähnlich wie Taylor stellte Euler die Principien der Differenzialrechnung dar *). Auch ihm war dieselbe nichts anderes als ein specieller Theil der Summen- und Differenzenrechnung. Er geht daher ebenso wie Taylor von endlichen Differenzen aus und stellt sich zunächst die Aufgabe, wenn y eine Function von x ist, und x wächst um das Increment ω , die zugehörige Differenz von y in eine nach Potenzen von ω fortschreitende Reihe zu entwickeln, und diess für die Differenzen aller Ordnungen zu thun, also Reihen aufzustellen von der Form

$$\begin{aligned}\Delta y &= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \dots \\ \Delta^2 y &= P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \dots\end{aligned}$$

wo die Coefficienten der Potenzen von ω wieder Functionen von x sind. Lassen wir nun ω verschwinden, so, bemerkt Euler, wird dadurch das Verhältniss von ω oder Δx , zu Δy nicht unbestimmt, obschon Δy und ω selbst geradezu $= 0$ sind. Indem aber nun das Verhältniss $\Delta x + \Delta x^2 : \Delta x$ oder $1 + \Delta x : 1$ für ein verschwindendes Δx übergeht in $1 : 1$, ergiebt sich, dass Δx^2 gegen Δx oder ω^2 gegen ω , wenn es verschwindet, weggelassen werden kann. Es folgt daher, wenn wir in unsrer Reihe $\omega = \Delta x$ und also auch Δy bis zu 0 abnehmen lassen, dass P das dann geltende Verhältniss von $dy : dx$ darstellt, u. s. w. Nimmt man nun x als in arithmetischer Progression erster Ordnung wachsend an, so folgt, dass $d^2x, d^3x,$

$$\sum [mn(x+n)(x+2n)\dots(x+m-1n)] = x(x+n)(x+2n)\dots(x+m-1n);$$

$$\sum \left[\frac{mn}{x(x+n)(x+2n)\dots(x+m-1n)} \right] = \frac{1}{x(x+n)(x+2n)\dots(x+m-1n)}.$$

Diess sind die Fundamentalsätze der Summen- und Differenzenrechnung, deren Ursprung also in Taylor zu suchen ist, indem Leibniz sich vorzüglich dem Rechnen mit unendlich kleinen Differenzen, oder Differenzialen zuwandte.

*) „Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum et doctrina serierum. Auctore Leonhardo Eulero.“ Petropolitanae. 1755.

u. s. w. $= 0$ sind. Nimmt man aber x als nicht in arithmetischer Progression wachsend an, so ist d^2x nicht $= 0$, es kann daher das Verhältniss $d^2y:d^2x$ nicht bestimmt werden. Euler ist nun der erste, der darauf aufmerksam macht, dass also Gleichungen, in denen solche Differenziale vorkommen,

z. B.
$$dz = dx^2 \cdot \frac{dx}{d^2x} + \frac{dy}{dx^2},$$

im Calcul unzulässig sind, weil sie nichts andres bezeichnen als $0 = 0$. Zugleich aber bemerkt er, dass die Unbestimmtheit einer solchen Differenzialgleichung oft nur scheinbar sei, indem sie nur in unbestimmter Form erscheine, während sie einen ganz bestimmten Werth besitze. Es sei z. B. gegeben die Gleichung:

$$z = \frac{dyd^2x - dx d^2y}{dx^3}.$$

Ist nun $y = f(x)$; $dy = \varphi(x)dx$; und, indem wir x als ungleichmässig wachsend annehmen: $d^2y = \psi(x)dx^2 + \varphi(x)d^2x$; so können wir, da $\varphi(x) = \frac{dy}{dx}$ war, die letzte Gleichung auch in der Form schreiben:

$$d^2y = \frac{dy}{dx} \cdot d^2x + \psi(x)dx^2;$$

oder:

$$dx d^2y = dy d^2x + \psi(x)dx^3;$$

folglich

$$z = \frac{dyd^2x - dx d^2y}{dx^3} = -\psi(x).$$

Euler meint also, dass solche unbestimmt scheinende Differenzialgleichungen ebenso gut einen bestimmten Werth haben, wie z. B. $(2+\sqrt{-1}) \pm (1-\sqrt{-1})$, also eine Differenz zweier complexen Zahlen, die reelle Zahl 3 liefert. Ebenso nun, wie in der Definition des Begriffs der Differenziale, geht Euler auch bei den Reihen von den endlichen Differenzen aus. Ist wieder y eine Function von x , wächst x in arithmetischer Progression mit der constanten Differenz Δx bis zu $x + \Delta x$, so ist, wenn Y den dazu gehörigen Werth von y bezeichnet:

$$Y = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 y + \dots$$

Lassen wir nun Δx bis zu Null abnehmen, jedoch so, dass stets $ndx = h$,

so folgt $n = \frac{h}{dx}$, also $\frac{n}{1} \cdot dy = \frac{h}{1} \cdot \frac{dy}{dx}$; $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot d^2y = \frac{n^2}{1 \cdot 2} \cdot d^2y - \frac{n}{1 \cdot 2} \cdot d^2y$

$$= \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx},$$

da aber der Subtrahend $= 0$ ist, so wird

$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot d^2y = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. Nennen wir daher $y = f(x)$, und also $Y = f(x+h)$ so erhalten wir die Taylor'sche Reihe wieder:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots$$

Wir sehen aus dem Vorigen, dass Euler ebenso wie es Taylor vor ihm gethan hatte, rein arithmetische Principien zu Grunde legt, während fast alle Uebrigen dieselben an geometrischen Gebilden entwickelt hatten. Wir sehen ferner, dass Euler erklärte, die Differenziale an sich sei $= 0$ und dass nur das Verhältniss im Momente des Verschwindens ein bestimmtes in endlichen Zahlen darstellbares sei. Indem er sich so an Newton und die eine von Leibnizens Methode anschliesst, geht er nicht, wie jene, auf die Untersuchung ein, mit welchem Rechte dann mit den einzelnen Differenzialen gerechnet werden dürfe. Newton hatte diese Frage dadurch gelöst, dass er an die Stelle der Momente die Fluxioneu, Leibniz dadurch, dass er an die Stelle der quantitates inassignabiles, zu denen dx , dy im Momente des Verschwindens werden, quantitates assignabiles, $(d)x$, $(d)y$ einsetzte, Euler spricht sich hierüber nicht aus, und rechnet mit den einzelnen Differenzialen ohne Weiteres wie mit endlichen Grössen.

§. 13.

Die Compensation der Fehler.

Bevor wir die Differenzialrechnung verlassen, muss noch auf eine Ansicht aufmerksam gemacht werden, die, wenn sie ausgebildet worden wäre, der Methode des Unendlichkleinen eine völlig sichere Basis verschafft haben würde, die aber leider bisher nur andeutungsweise erwähnt wird. Obschon nämlich, wie im Früheren gesagt wurde, die Theorie des Unendlichkleinen sehr bald sich verbreitete und viele und bereitwillige Anhänger fand, so konnte es doch nicht fehlen, dass nach Gründlichkeit strebende Männer ihr entgegentraten. Der erste, der in dieser Beziehung, und gegen Leibniz selbst, auftrat, war, wie oben erwähnt wurde, der Niederländer Nieuwentijt. Nach demselben trat, wenigstens nicht mit solcher Entschiedenheit, geraume Zeit hindurch Niemand gegen dieselbe auf. Gleichwohl aber gab es immer noch Männer genug, die entweder, wie Huygens, die Infinitesimalrechnung überhaupt, in

ihrer Gestalt sowohl als Fluxions-, wie als Differenzialrechnung grundsätzlich nicht anwandten, und die Methode der Alten vorzogen, theils aber auch nur der Differenzialrechnung, insofern sie in ihr nur die Theorie des Unendlichkleinen kannten, abhold waren, jedoch nichts Besseres an ihre Stelle zu setzen vermochten. In diesem Sinne trat ein anonymen Autor*) im Jahre 1734 auf und unterwarf sowohl die Newton'sche Fluxions-, wie die Leibnizische Differenzialrechnung einer strengen Kritik**). Was derselbe gegen die erstere sagt, z. B. dass es widersinnig sei, eine Grösse um ein halbes Increment wachsen zu lassen, wie Newton in seinen Princip. gethan hatte (s. §. 3), ist bereits im Obigen seines Ortes berücksichtigt worden. Ebenso der Vorwurf, den man mit Recht der Theorie des Unendlichkleinen machen muss, dass dieselbe, indem einige Grössen als unendlichklein im Vergleich mit den übrigen vernachlässigt werden, ein nur annäherungsweise richtiges Resultat geben könne. Auch der Ungenannte kommt, wie Nieuwentiit früher gethan hatte, auf diesen Umstand zurück, glücklicher jedoch als dieser giebt er ein Verfahren an, wie wenigstens in der Anwendung der Differenzialrechnung auf Geometrie dargethan werden könne, dass diese Unrichtigkeit des Resultats nur eine scheinbare sei, indem allerdings ein Fehler begangen werde, wenn man einige Grössen vernachlässigt, dass dieser Fehler aber durch einen zweiten stets wieder compensirt, wieder aufgehoben werde. Als Beispiel wählt er den Beweis, der beim Aufsuchen der Subtangente der gemeinen Parabel geführt werde. Ihre Gleichung ist $y^2 = px$. Nach der Theorie der Differenzialrechnung wird nun ein unendlichkleines Stück RQ in der Ordinate der Tangente (Fig. 44.) angenommen, von dem man annimmt, dass es mit dem Stücke P_2Q der Ordinate der Parabel zusammenfalle. Dann stellt man die Proportion auf: $dy : dx = y : \text{subtang.}$

woraus folgt: $\text{subtang.} = y \frac{dx}{dy}$.

*) „The analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician. By the author of the minute philosopher. London. 1734.“ Die unter dem Titel: „Philalethes Cantabrigiensis responsio ad Analystam“ erschienene Vertheidigungsschrift der Fluxionsrechnung war mir leider nicht zugänglich.

**) Buffon, in der Einleitung seiner Méthode des Fluxions, spricht sich über den Verfasser derselben mit gewohnter Leidenschaftlichkeit aus.

In unserm Beispiele, wo $y^2 = px$ ist, ergibt sich nun, wenn wir x um $P_1Q = dx$ und also y um $P_2O = dy$ zunehmen lassen: $(y + dy)^2 = p(x + dx)$ oder $y^2 + 2ydy + dy^2 = px + pdx$;

oder: $2ydy = px + pdx - y^2 - dy^2$.

Indem nun der Voraussetzung nach $px = y^2$, also $px - y^2 = 0$ ist, folgt:

$$2ydy = pdx - dy^2;$$

also: $dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dy^2}{2y}$.

Nun, fährt der ungenannte Autor fort, schliesst man gewöhnlich so: da das Quadrat dy^2 im Vergleich mit x , y , p , dx , dy unendlich klein ist, so kann der Subtrahend rechts vernachlässigt werden und man folgert somit

aus unserer Gleichung: $dy = \frac{pdx}{2y}$;

mithin $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$.

Man erhält so die *subtang.* $= y \frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{p}$,

oder da $y^2 = px$ war: *subtang.* $= 2x$.

Dass dieses Verfahren fehlerhaft sei, leuchtet nun sogleich ein, indem die Grösse $\frac{dy^2}{2y}$ weggelassen wird. Allein der ungenannte Verfasser beweist

die Richtigkeit des Resultats folgendermaassen: Es werden hierbei offenbar zwei Fehler begangen, der eine indem man die Linien QR und QP_2 als identisch nimmt und QR durch dy bezeichnet, hierbei wird jedenfalls ein Fehler begangen, dessen Maass das Liniestück P_2R , welche vernachlässigt wird, ist; der zweite Fehler entsteht durch Ausscheidung des Subtrahenden $\frac{dy^2}{2y}$. Suchen wir nun die Länge der Linie P_2R , mithin die Grösse des

ersten Fehlers zu ermitteln; sie werde durch u bezeichnet, während $dy = QP_2$, $P_1Q = dx$ sei. Nach einem von Apollonius aufgestellten Satze nun verhält sich $2x : y = dx : dy + u$;

woraus folgt: $u = \frac{ydx}{2x} - dy$.

Da nun $y^2 = px$, also $x = \frac{y^2}{p}$ ist, so folgt:

$$dx = \frac{2ydy + dy^2}{p}.$$

Wird diess in den Werth für u an die Stelle von dx eingesetzt, so er-

giebt sich: $u = \frac{2y^2dy + ydy^2}{2y^2} - dy;$

oder $u = \frac{dy^2}{2y}.$

Es ist also u genau gleich dem weggelassenen Subtrahenden in der Gleichung

$$dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dy^2}{2y}.$$

Denselben weglassen, heisst also nichts anderes, als die Linie P_2R zu QP_2 hinzuaddiren, d. h. es wird auf diese Weise der früher begangene Fehler, dass QP_2 mit QR identificirt worden war, woraus, wenn dx , dy noch für endliche Grössen angenommen werden, die unrichtige Gleichung: $subtang. = y \frac{dx}{dy}$ hervorging, wieder aufgehoben. Weit entfernt also, durch

Vernachlässigung von $\frac{dy^2}{2y}$ einen zweiten Fehler zu begehn und die Unrichtigkeit des Resultats zu vergrössern, wird gerade hierdurch dasselbe zu einem absolut richtigen. Nur aber, bemerkt der Autor, sei es eine unrichtige Vorstellung, wenn man das Glied $\frac{dy^2}{2y}$ wegen seiner Kleinheit unbeachtet lasse, es geschehe eben nur desswegen, um zu einem richtigen Resultate zu gelangen.

Nach diesem anonymen Verfasser sprach sich auch Euler *) dahin aus, dass durch Vernachlässigung einiger Differenziale Fehler ausgeglichen würden, allein er bemerkt diess nur im Vorbeigehn, ohne sich auf eine weitere Untersuchung dieses Gegenstandes einzulassen. Es scheint auch eine solche nicht wieder angestellt worden zu sein bis auf Carnot. Auch dieser zeigt **), dass durch das Vernachlässigen von einzelnen Gliedern die Rechnung nur berichtigt, nicht unsicher gemacht werde. Es sei z. B. die Subtangente der Ellipse gesucht. Man nehme, wie es Leibniz that, an, die selbe sei ein Aggregat unendlich kleiner Linien, wie QP_2 (Fig. 39), ferner sei $M_1M_2 = N_2Q_2 = \Delta x$; $N_2P_2 = \Delta y$; so folgt, dass die Linie P_1P_2 um so kleiner wird, je kleiner Δx , Δy angenommen werden; es wird also, je kleiner diese sind, um so richtiger die Proportion gelten:

*) Institutiones calculi differentialis etc. Introductio.

**) „Oeuvres mathématiques“ par citoyen Carnot. A Basle 1795. „Reflexions sur la métaphysique du calcul superieur.“

oder: $P_2 N_2 : Q_2 N_2 = y : \text{subtang.}$

mithin wird: $\Delta y : \Delta x = y : \text{subtang.}$

Sind nun a, b , die Halbachsen der Ellipse, so ist ihre Gleichung:

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, mithin ist auch:

$$(y + \Delta y)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2)$$

also: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2y + \Delta y}{2x + \Delta x}$,

und es wird: $\text{subtang.} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2y + \Delta y}{2x + \Delta x} \cdot y$.

Sehen wir ab vom Zeichen und vernachlässigen Δx und Δy , so folgt:

$$\text{subtang.} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x}.$$

Dass nun diese Gleichung eine nicht näherungsweise, sondern absolut richtige ist, lässt sich nach Carnot dadurch nachweisen, dass nach einem bekannten Satze die Subtangente $M_1 S$ der Ellipse ebenso gross ist als die des über derselben Abscisse befindlichen Punktes P_1 eines mit der grossen Halbachse a der Ellipse als Radius beschriebenen Kreises. Es ist also $\angle ON_1 S$ ein rechter, mithin, wenn die Ordinate $M_1 Q_1$ durch y' bezeichnet wird: $M_1 S = \text{subtang.} = \frac{y'^2}{x}$; und da $y' = \frac{a}{b}y$ ist, wenn

$y = M_1 P_1$, so folgt: $M_1 S = \text{subtang.} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x}$; mithin dasselbe Re-

sultat, wie es durch Vernachlässigung von $\Delta x, \Delta y$ erhalten war. Im Grunde aber, bemerkt Carnot, wird hierdurch kein Fehler begangen, sondern nur die Unrichtigkeit, die in der Annahme liegt, die Ellipse bestehe aus einem Aggregate gerader Linien, $Q_2 P_2$, wieder ausgeglichen, also die Richtigkeit der Rechnung hergestellt. So kommt es, dass Carnot als Kriterium der Richtigkeit eines Resultats angiebt, dasselbe dürfe keine der willkürlichen Grössen, $\Delta x, \Delta y$, mehr enthalten, und sich dahin ausspricht, dass dieselben nicht allein vernachlässigt werden können, sondern müssen.

Es ist wohl nicht zu leugnen, dass durch eine weitere Ausbildung dieser Theorie der Compensation der Fehler das Verfahren der Vernachlässigung einzelner Glieder, wie es in der Methode des Unendlichkleinen ausgeübt

wird, auf eine sichere und wissenschaftliche Basis zurückgeführt werden kann. Freilich wird dies immer leichter sein in den Anwendungen auf Geometrie, als in der reinen Analysis; immer aber müssen dabei einige Sätze als bekannt voraussetzen sein, wie z. B. der Satz, dass die Subtangente der Ellipse der des Kreises mit der grossen Halbachse als Halbmesser gleich sei von Carnot, der Apollonische Satz, dass sich bei der Parabel $2x : y = dx : dy + u$ verhalte, von dem anonymen Verfasser als erwiesen angesehen wird. Solche Sätze müssten natürlich erst unabhängig von den Hilfsmitteln der höheren Mathematik, nach der synthetischen Methode der Alten, auf phoronomische oder sonstige Weise dargethan werden, und das sowohl, als der Umstand, dass in jedem einzelnen Falle ein besonderer Beweis geführt werden müsste, indem sich eine allgemein gültige Methode nicht anwenden lässt, ist wohl der Grund, weshalb die Theorie der Fehlercompensation bis jetzt noch nicht weiter ausgebildet worden ist.

Capitel III.

Die Derivationsrechnung.

§. 14.

Lagrange's Derivationsrechnung.

Es ist gewiss merkwürdig, dass bald nachdem die Leibnizisch-Wolfische Philosophie durch Kant den tödtlichen Stoss erhalten hatte, auch eine neue, von der Vorstellung des Unendlichkleinen freie, Auffassung der höheren Analysis an das Licht trat. Schon Taylor und Euler hatten in ihrer Darstellung der Differenzialrechnung der Hülfe geometrischer Vorstellungen entsagt und dadurch dieselbe allerdings in grösserer Allgemeingültigkeit, frei von den beengenden Fesseln, die die Vorstellung des Raumes für den menschlichen Geist mit sich führt, eben dadurch aber auch abstracter und weniger anschaulich gemacht, kurz die Differenzialrechnung gänzlich auf das Gebiet der reinen Analysis gezogen. Noch weiter ging in der Abstraction Lagrange, der von dem Fundamentalbegriffe der Analysis, vom Begriffe der Function aus sogleich die Infinitesimalrechnung aufbaute,

Sein Verfahren nämlich ist folgendes *): Es bezeichne $f(x)$ eine Function von x ; gesucht sei der Werth, den dieselbe hat, wenn die Variable x bis auf $x+h$ gewachsen ist. Lagrange setzt nun als gewiss voraus, dass sich $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe entwickeln lasse von der Form $f(x+h) = A_0 h^\lambda + A_1 h^\mu + A_2 h^\nu + \dots$

Um nun die Coefficienten A_0, A_1 , u. s. w. zu bestimmen, bedenken wir Folgendes. Da die rechte Seite der Gleichung, wie die linke für $h = 0$ den Anfangswerth $f(x)$ geben muss, so folgt, dass die Exponenten lauter positive Zahlen sein müssen, weil, wenn einer derselben negativ wäre, die rechte Seite für $h = 0$ den unzulässigen Ausdruck $\frac{A}{0}$ liefern würde. Da aber ferner für $h = 0$ die rechte Seite nur den einen Werth $f(x)$ annehmen muss, so folgt, dass die Exponenten auch nur ganze Zahlen sein können, denn kämen gebrochene Zahlen unter ihnen, also Wurzeln vor, so würden wegen der Vieldeutigkeit derselben für $h = 0$ mehrere Werthe herauskommen. Endlich folgt aus der angegebenen Bedingung, dass das erste Glied von h frei sein müsse, damit für $h = 0$ sich nicht die ganze rechte Seite annullire und dass das erste Glied $= f(x)$ sei. Es ist also die Reihe von der Form: $f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \dots$,

indem Lagrange voraussetzt, dass im Allgemeinen sämtliche Potenzen von h sich finden. Um nun A, B, C , u. s. w. zu finden, bedenken wir, dass die Gleichung, indem man sich auf der rechten Seite den allen Gliedern mit Ausnahme des ersten gemeinschaftlichen Factor h herausgesetzt denken kann, jedenfalls die Form hat:

$$f(x+h) = f(x) + \alpha \cdot h,$$

wenn α eine Function von x und h bezeichnet. Dies ergibt sich schon daraus, dass aus eben dieser Gleichung folgt:

$$\alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A + Bh + Ch^2 + \dots$$

Wir können also α durch $\varphi(x, h)$ bezeichnen, so dass $f(x+h) = f(x) + h \cdot \varphi(x, h)$ wird. Zugleich ergibt sich aus dem Bisherigen, da $\alpha = A + Bh + Ch^2 + \dots$ $\varphi(x, h)$ ist, dass es sich in zwei Theile theilen lässt, deren einer kein h enthält, also im Allgemeinen eine Function bloß von x ist, deren anderer eine Function von x und h ist und h als Factor

*) Lagrange: „Traité des fonctions analytiques.“ Nouv. edit. Paris. 1813.

enthält. Der von h freie Theil kann nun offenbar, da für $h = 0$, $\varphi(x, h)$ in $\varphi(x)$ muss, kein anderer sein als $\varphi(x)$ selbst; es ist also $\varphi(x, h) = \varphi(x) + h \cdot \psi(x, h)$, mithin wird:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \varphi(x) + h^2 \cdot \psi(x, h).$$

Indem nun wieder $\psi(x, h) = \psi(x) + h \cdot \chi(x, h)$ ist, u. s. w. erhält man durch immer neues Zerlegen die Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \varphi(x) + h^2 \psi(x) + h^3 \chi(x) + \dots \quad \alpha)$$

Was die Convergenz betrifft, so können die Bedingungen derselben nach den bisherigen ganz allgemeinen Betrachtungen natürlich nicht angegeben werden, es leuchtet aber ein, dass, da die unendliche Reihe für $h = 0$ convergirt, indem ihre Summe dann $= f(x)$ ist, irgend ein Werth von h existirt, für den die Summe der auf irgend ein Glied folgenden Glieder kleiner ist als dieses selbst, insofern dies nicht unter unendlicher Form steht. Bis jetzt ist nun zwar gezeigt worden, dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen von h im Allgemeinen Functionen von x sind, es ist nun noch zu entwickeln, nach welchem Gesetze sie von einander abhängen. Zu dem Zwecke suchen wir den Werth von $f(x+h+k)$. Dieser kann nun auf doppelte Weise gefunden werden, entweder indem wir in $\alpha)$ nur $h+k$ an die Stelle von h setzen, oder indem wir in derselben Gleichung $x+k$ an die Stelle von x setzen und die Coefficienten $f(x+k)$, $\varphi(x+k)$ u. s. w. in Reihen verwandeln, die nach demselben Gesetze wie die Reihe $\alpha)$ nach h , so nach k fortgehen. Durch das erste Verfahren erhalten wir nach $\alpha)$ die Gleichung:

$$f(x+h+k) = f(x) + (h+k) \cdot \varphi(x) + (h+k)^2 \cdot \psi(x) + (h+k)^3 \chi(x) + \dots$$

oder nach Potenzen von h und k geordnet:

$$\left. \begin{aligned} (x+h+k) &= f(x) + h\varphi(x) + h^2 \cdot \psi(x) + h^3 \chi(x) + \dots \\ &\quad + k\varphi(x) + 2hk\psi(x) + 3h^2k\chi(x) + \dots \\ &\quad + k^2 \cdot \psi(x) + 3hk^2\chi(x) + \dots \\ &\quad + k^3 \chi(x) + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned} \right\} \quad \beta)$$

Durch das zweite oben erwähnte Verfahren erhalten wir aus $\alpha)$:

$$\left. \begin{aligned} f(x+h+k) &= f(x+k) + h\varphi(x+k) + h^2 \psi(x+k) \\ &\quad + h^3 \chi(x+k) + \dots \end{aligned} \right\} \quad \gamma)$$

Nun leuchtet ein, dass sich $f(x+k)$, $\varphi(x+k)$, $\psi(x+k)$, $\chi(x+k)$ u. s. w. in Reihen verwandeln lassen, die nach Potenzen von k fortgehen, ebenso wie

sich $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe entwickeln lässt. Lagrange setzt daher:

$$f(x+k) = f(x) + kf'(x) + k^2 f''(x) + k^3 f'''(x) + \dots \quad \dagger)$$

$$\varphi(x+k) = \varphi(x) + k\varphi'(x) + k^2 \varphi''(x) + k^3 \varphi'''(x) + \dots$$

u. s. w., wo die Coefficienten von k in einer noch unbekannten Beziehung zu den früheren, $f(x)$, $\varphi(x)$ u. s. w. stehen. Es leuchtet ein, dass hier ein Irrthum von Seiten Lagrange's obwaltet. Denn indem in der Gleichung $\alpha)$ die Coefficienten von h kein h mehr enthalten, müssen sie offenbar dieselben bleiben, wir mögen $f(x+h)$ oder $f(x+k)$ in eine Reihe verwandeln. Es müssen also in der Gleichung $\dagger)$ die Coefficienten von k dieselben sein wie in $\alpha)$ die von h . Indem dies nicht berücksichtigt wird, kann es nicht wunderbar sein, dass sich ein nicht richtiges Resultat ergibt. Denn werden die von Lagrange aufgestellten Reihen für $f(x+k)$, $\varphi(x+k)$ u. s. w. in die Gleichung $\gamma)$ eingesetzt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} f(x+h+k) &= f(x) + kf'(x) + k^2 f''(x) + k^3 f'''(x) + \dots \\ &+ h\varphi(x) + hk\varphi'(x) + hk^2 \varphi''(x) + hk^3 \varphi'''(x) + \dots \\ &+ h^2 \psi(x) + h^2 k^2 \psi'(x) + h^2 k^2 \psi''(x) + h^2 k^3 \psi'''(x) + \dots \\ &+ \dots \end{aligned} \right\} \delta')$$

Vergleichen wir nun in den beiden für $f(x+h+k)$ aufgestellten Gleichungen $\beta)$ und $\delta')$ die gleichen Potenzen von h und k , so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f'(x), \quad 2\psi(x) = \varphi'(x), \quad 3\chi(x) = \psi'(x), \dots \\ \psi(x) &= f''(x), \quad 3\chi(x) = \varphi''(x), \dots \\ \chi(x) &= f'''(x), \dots \end{aligned}$$

folglich:

$$\varphi(x) = f'(x); \quad \psi(x) = \frac{\varphi'(x)}{2} = f''(x); \quad \chi(x) = \frac{\psi'(x)}{3} = \frac{\varphi''(x)}{3} = f'''(x), \dots$$

Lagrange behält von den Reihen in $\delta')$ nur die beiden ersten horizontalen bei, so dass er nur erhält:

$$\varphi(x) = f'(x), \quad 2\psi(x) = \varphi'(x), \quad 3\chi(x) = \psi'(x), \text{ u. s. w.}$$

Da nun, schliesst er weiter, $\varphi'(x)$ ebenso aus $\varphi(x)$, wie $f'(x)$ aus $f(x)$ abgeleitet wird, und $\varphi(x) = f'(x)$ ist, so ist $\varphi'(x) = f''(x)$, so dass unsere Gleichungen lauten:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{1}, \quad \psi(x) = \frac{f''(x)}{1 \cdot 2}, \quad \chi(x) = \frac{\psi'(x)}{3} = \frac{f'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichung $\alpha)$ nimmt die Form an:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x) + \dots,$$

ein Resultat, welches mit der Gleichung $\dagger)$ in Widerspruch steht, indem aus derselben, wenn das ganz willkürliche $k = h$ angenommen wird, folgen würde:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x) + h^3 f'''(x) + \dots$$

Diese Unzulänglichkeit der von Lagrange gegebenen Begründung ward übrigens schon früh erkannt und bereits von Crelle *) vermieden. Indem nämlich bis zur Gleichung $\dagger)$ excl. Alles so bleibt wie früher, tritt an die Stelle der Formel $\dagger)$:

$$f(x+k) = f(x) + k\varphi(x) + k^2\psi(x) + k^3\chi(x) + \dots$$

die anderen Gleichungen:

$$\varphi(x+k) = \varphi(x) + k\varphi'(x) + k^2\varphi''(x) + k^3\varphi'''(x) + \dots$$

u. s. w. bleiben dieselben. Es geht also die Gleichung $\delta')$ über bei leicht ersichtlicher Aenderung der Anordnung in:

$$\left. \begin{aligned} f(x+h+k) &= f(x) + h\varphi(x) + h^2\psi(x) + h^3\chi(x) + \dots \\ &\dots + k\varphi(x) + hk^2\varphi'(x) + h^2k\psi'(x) + h^3k\chi'(x) + \dots \\ &\dots + k^2\psi(x) + hk^2\varphi''(x) + h^2k^2\psi''(x) + h^3k^2\chi''(x) + \dots \\ &\dots + k^3\chi(x) + hk^3\varphi'''(x) + h^2k^3\psi'''(x) + h^3k^3\chi'''(x) + \dots \end{aligned} \right\} \delta)$$

Werden jetzt die Coefficienten von h und k in den Gleichungen $\beta)$ und $\delta)$ verglichen, so erhalten wir die Relationen:

$$\begin{aligned} \dots \varphi'(x) &= 2 \cdot \psi(x), & \text{folglich } \psi(x) &= \frac{1}{2} \varphi'(x), \\ \dots \psi'(x) &= 3 \cdot \chi(x), & \text{,, } \chi(x) &= \frac{1}{3} \psi'(x), \\ \dots \varphi''(x) &= 3 \cdot \chi(x), & \text{,, } \chi(x) &= \frac{1}{3} \varphi''(x) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Nun ist $\psi(x)$ der Coefficient von h^2 der Reihe, die entsteht, wenn in $f(x)$ das x um h wächst, $\varphi'(x)$ ist der Coefficient von k , wenn wir in $\varphi(x)$ das x um k zunehmen lassen, u. s. w. Aber $\varphi'(x)$ entsteht auf dieselbe Weise aus $\varphi(x)$ wie $\varphi(x)$ aus $f(x)$. Man findet also den Coefficienten $\psi(x)$ von k^2 , wenn man zuerst x in $x+h$ übergehen lässt und so den Coefficienten von h , nämlich $\varphi(x)$ bildet, dann in $\varphi(x)$ das x um k zu-

*) „Versuch einer rein algebraischen und dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik angemessenen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Grössen.“ Von August Leopold Crelle. Göttingen. 1813.

nehmen lässt, so $\varphi'(x)$ erhält und dies durch die Anzahl der Operationen nämlich durch 2 dividirt. Wird also $\varphi(x)$ durch $f'(x)$ bezeichnet, so ist $\varphi'(x)$, welches aus $\varphi(x)$ ebenso entsteht wie $\varphi(x)$ aus $f(x)$, zu bezeichnen durch $f''(x)$; also wird $\psi(x) = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot f''(x)$. Ferner entsteht $\psi'(x)$ ebenso aus $\psi(x)$, wie $\varphi(x)$ aus $f(x)$. Wenn also $\varphi(x)$ durch $f'(x)$ bezeichnet wird, ist $\psi'(x)$, da $\psi(x) = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot f''(x)$ war, durch $\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot f'''(x)$ zu bezeichnen, also ist $\chi(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x)$. Wir erhalten die Beziehungen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1} \cdot f'(x)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot f''(x)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x)$$

u. s. w.

Mithin lautet die Gleichung α):

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \dots$$

Die Coefficienten $f'(x)$, $f''(x)$, u. s. w. nennt nun Lagrange die aus der primitiven Function $f(x)$ abgeleiteten oder derivirten, oder die Derivirten schlechtweg. Indem nun aus dem Taylor'schen Theorem bekannt ist, dass diese Coefficienten die Differenzialquotienten der Urfunction $f(x)$ sind, erklärt es sich, dass „Derivirte“ und „Differenzialquotient“ dasselbe bedeuten; da ferner der erstere Name den Differenzialquotienten bedeutet, insofern er Coefficient in der Taylor'schen Reihe ist, bedient man sich auch wohl des Ausdrucks „Differenzialcoefficient“ statt „Differenzialquotient.“

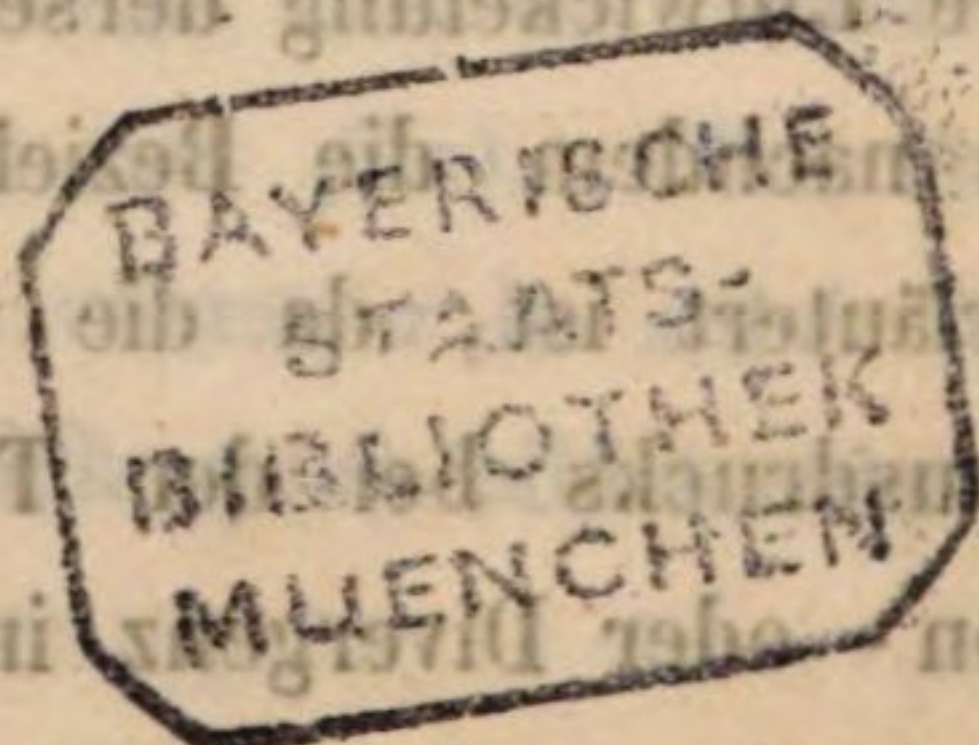
Der Begriff der Derivation ist der Fundamentalbegriff der Lagrange'schen Theorie. Auf die weitere Entwicklung derselben brauchen wir uns hier nicht weiter einzulassen, nachdem die Beziehung der „Derivirten“ zum „Differenzialquotienten“ erläutert ist, da die wichtigsten Sätze, wie z. B. die Aufstellung des Restausdrucks bei der Taylor'schen Reihe, mit dem die Entscheidung ihrer Con- oder Divergenz in jedem einzelnen Falle zusammenhängt, in allen Lehrbüchern der Differenzialrechnung zu finden sind.

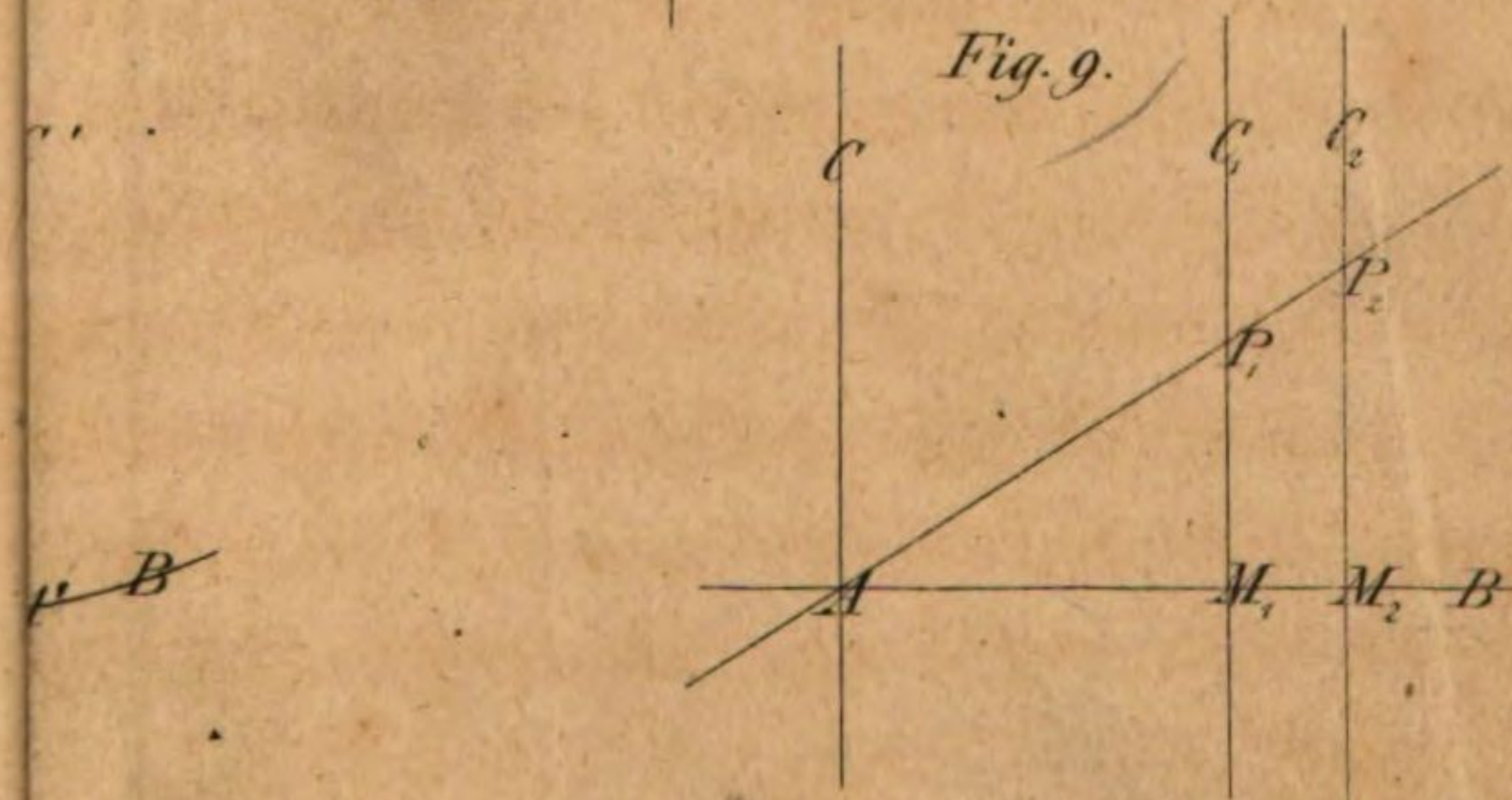
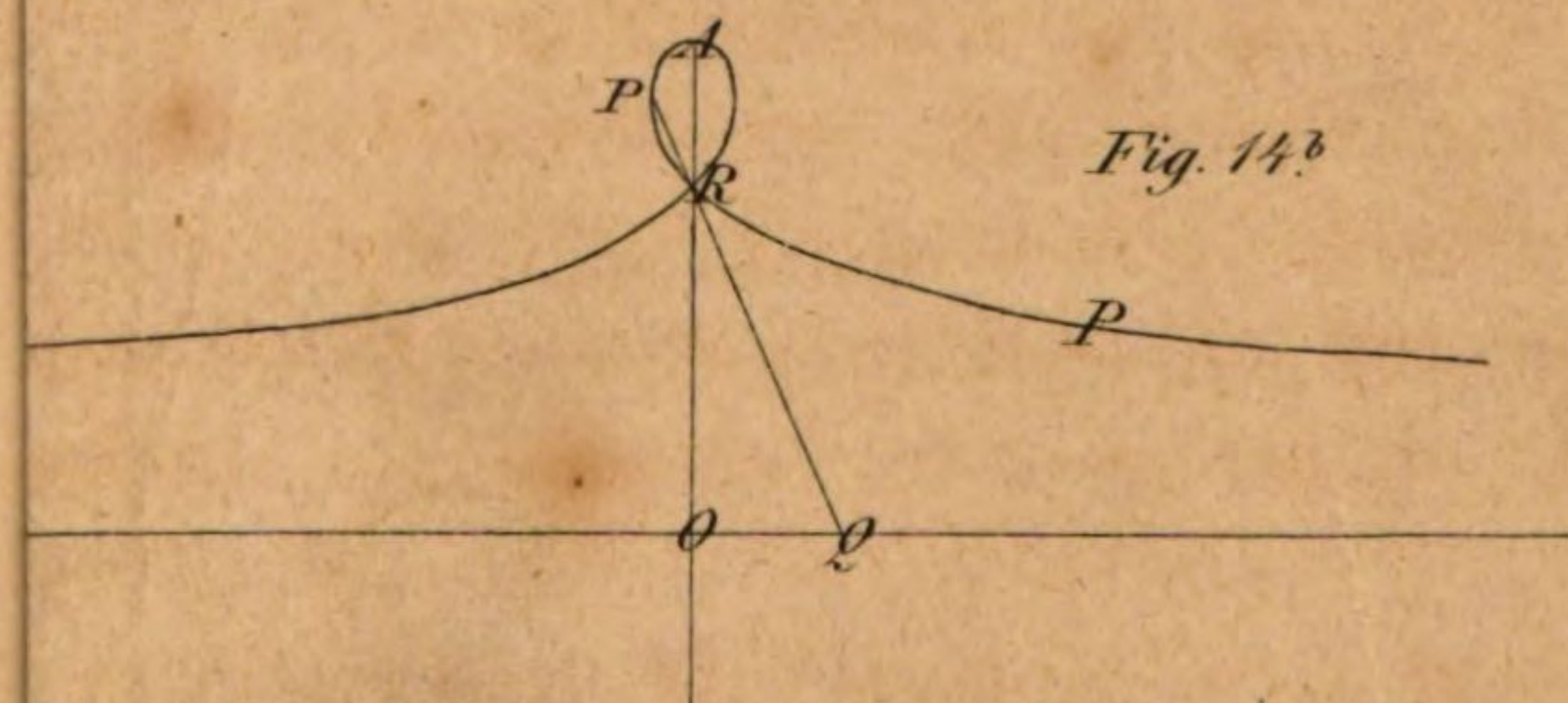
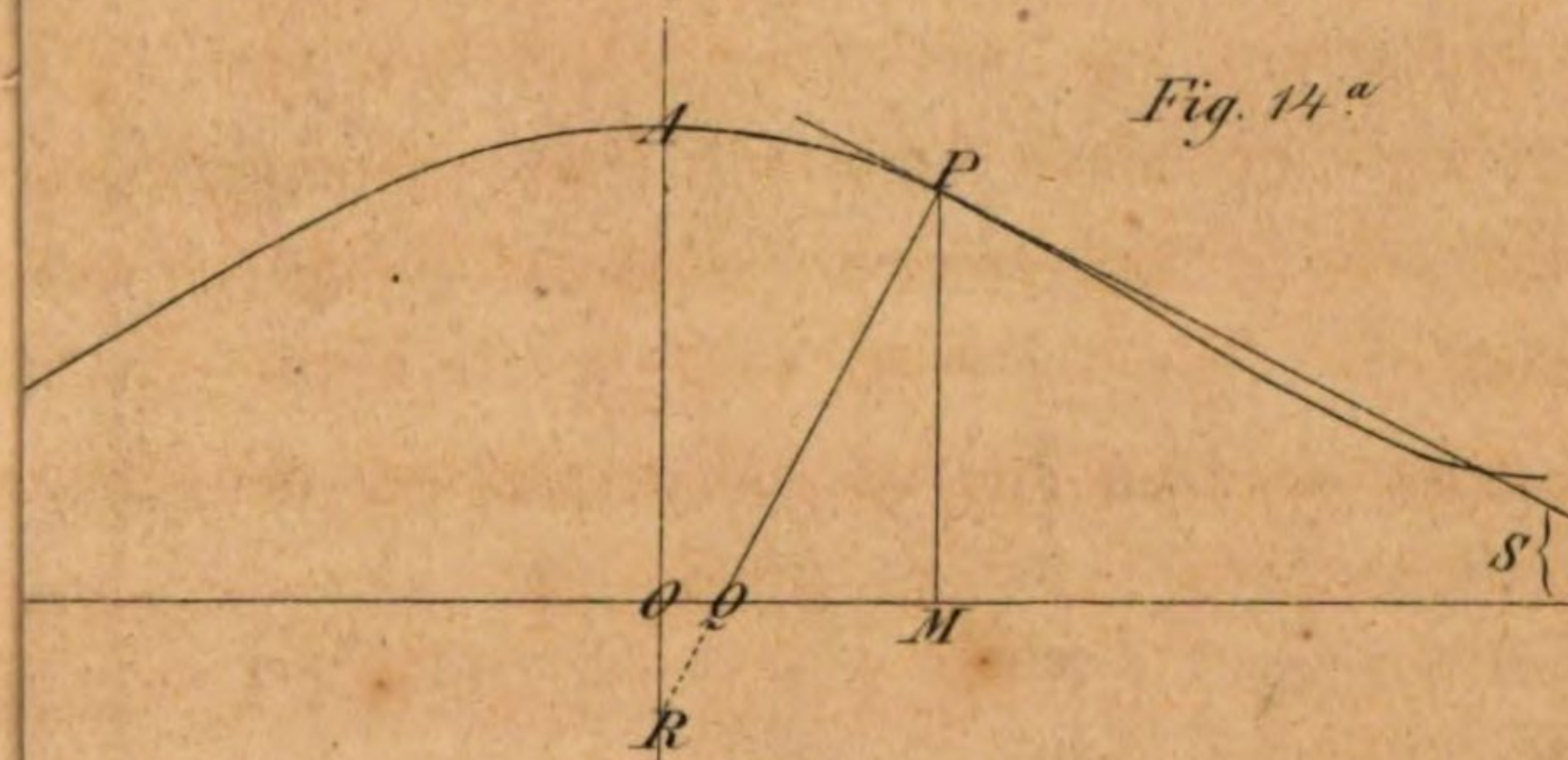
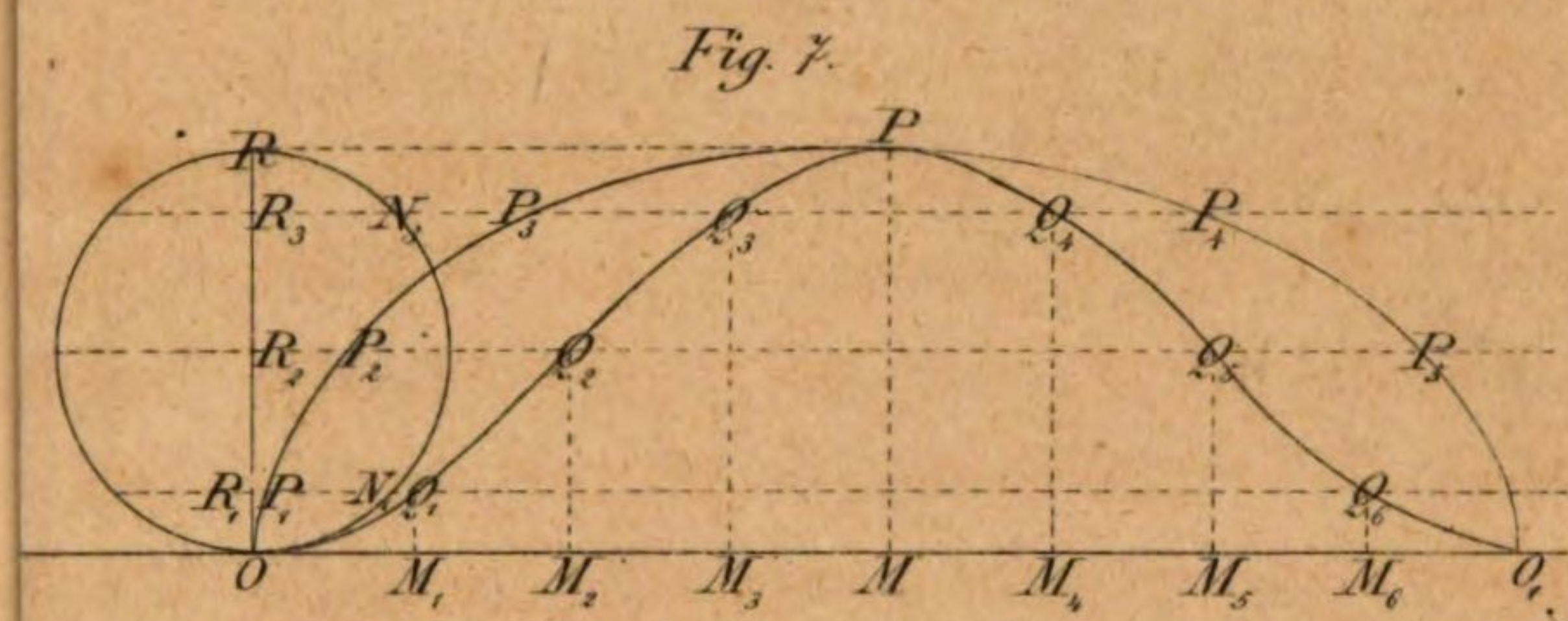
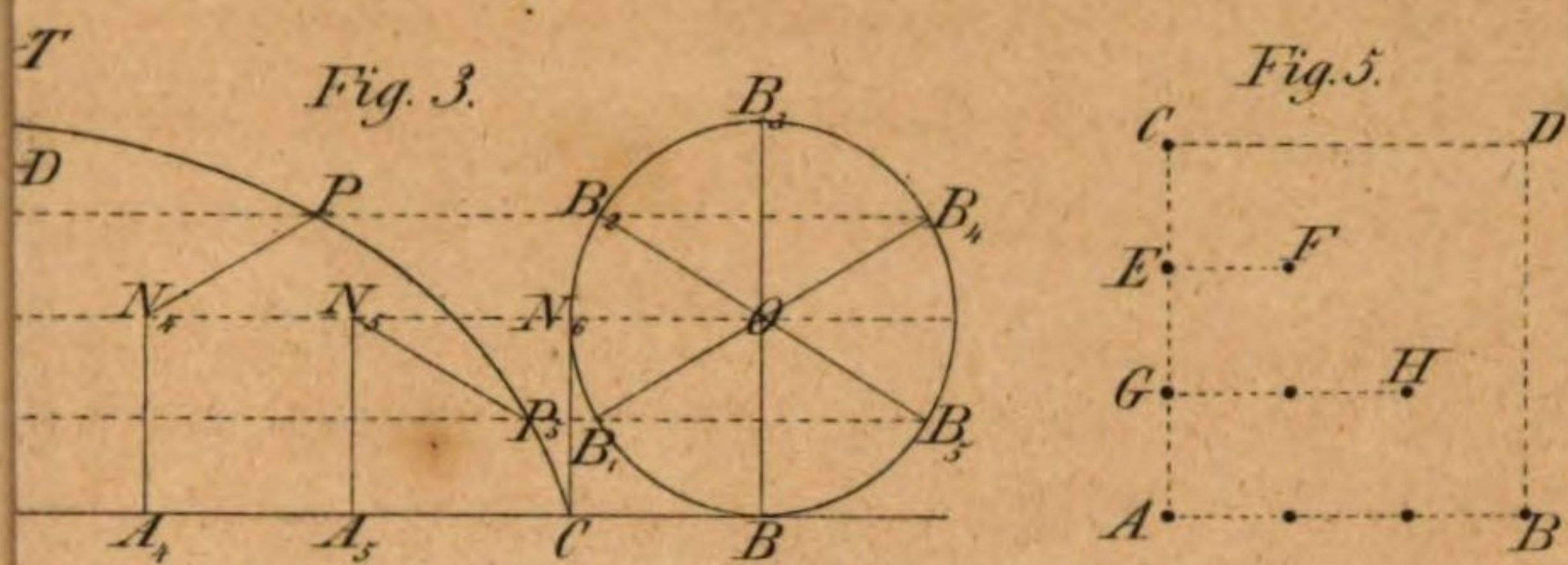
Schluss.

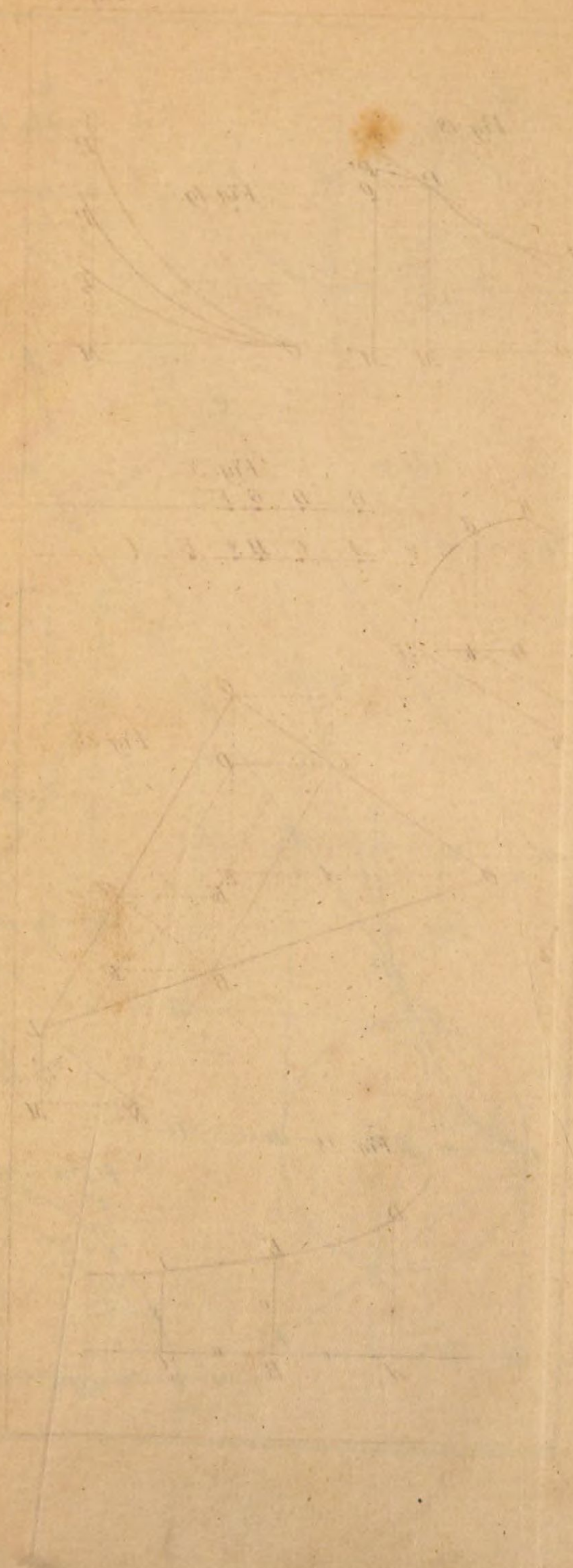
Wenn wir die Darstellung der verschiedenen Principien der Infinitesimalrechnung nur bis auf Lagrange fortgeführt und hier abgebrochen haben, so geschah dies aus dem Grunde, weil einmal die Geschichte der Mathematik von dieser Zeit an zu bekannt ist, sodann weil einige Versuche, eine andere Auffassung der Principien herbeizuführen, bis jetzt weiter keinen sichtbaren Erfolg gehabt haben, wie die von Ernst Gottfried Fischer*) und Johann Karl Fischer**), während zugleich aus dem Vorigen ersichtlich sein wird, dass der Fundamentalgedanke von Cauchy's gegenwärtig gebräuchlicher Theorie der Grenzen bereits vor demselben, aber unentwickelt, vorhanden, und schon von Newton ausgesprochen war. Indem derselbe nun weiter verfolgt und klarer hingestellt wurde, entstand die von dem grössten Theile der jetzigen Mathematiker mit Recht befolgte Grenzmethod e.

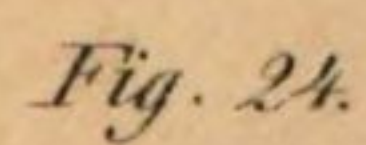
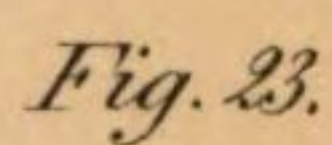
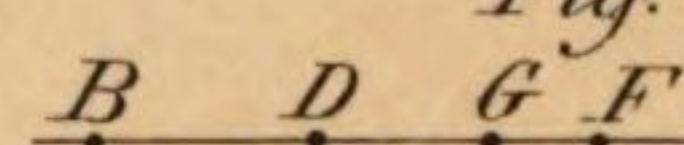
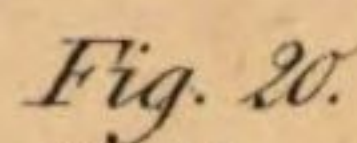
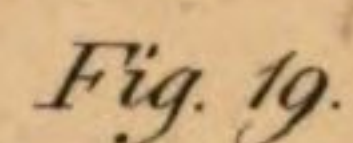
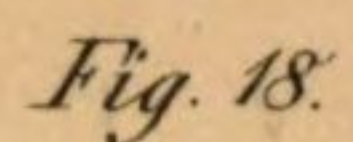
*) Ernst Gottfried Fischer: „Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis.“ Berlin. 1808.

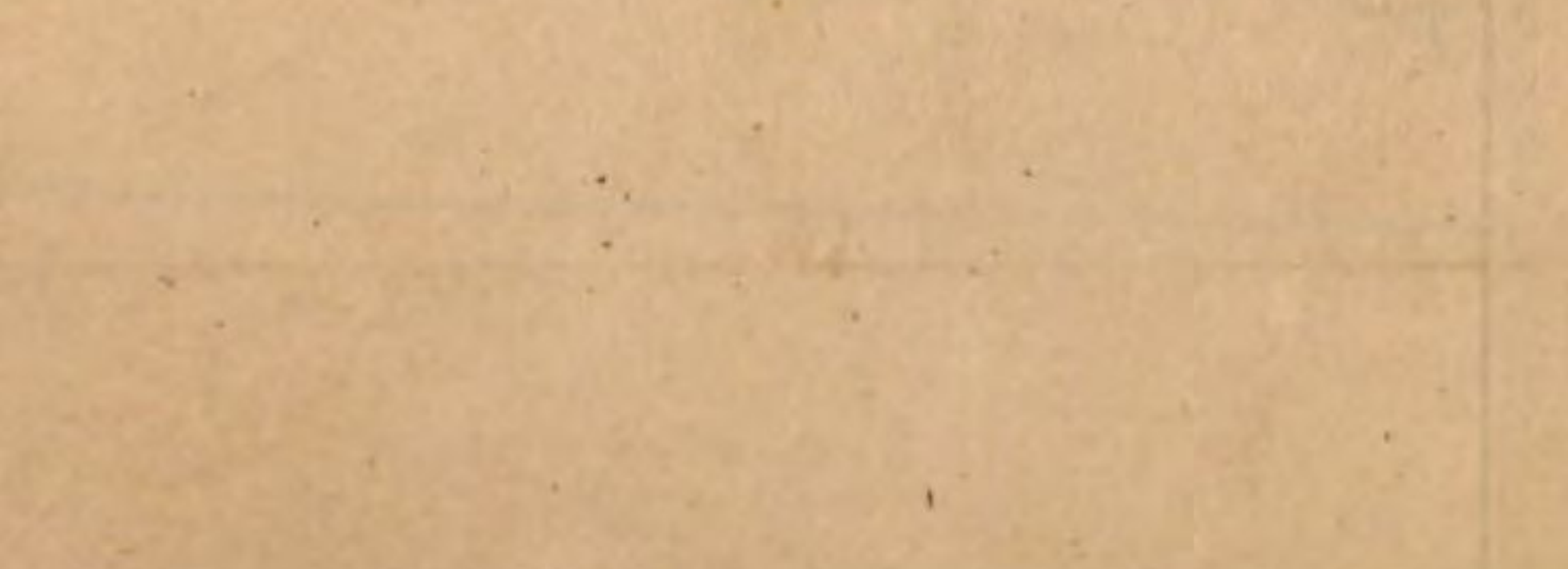
*) Johann Karl Fischer: „Neue Ansichten über die Grundprincipien der Differenzialrechnung.“ Leipzig. 1831.











4.

Fig. 41.

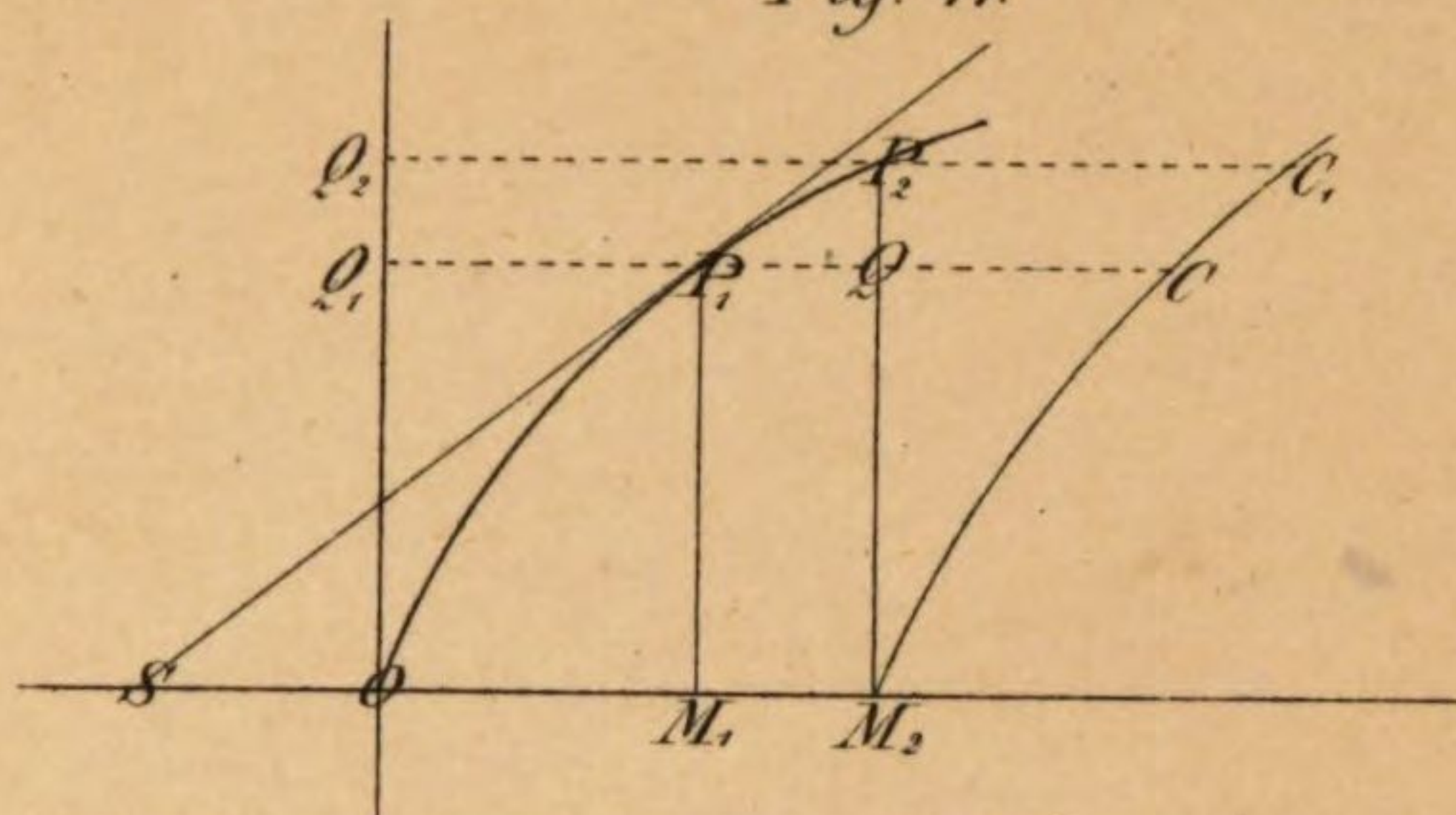


Fig. 40.

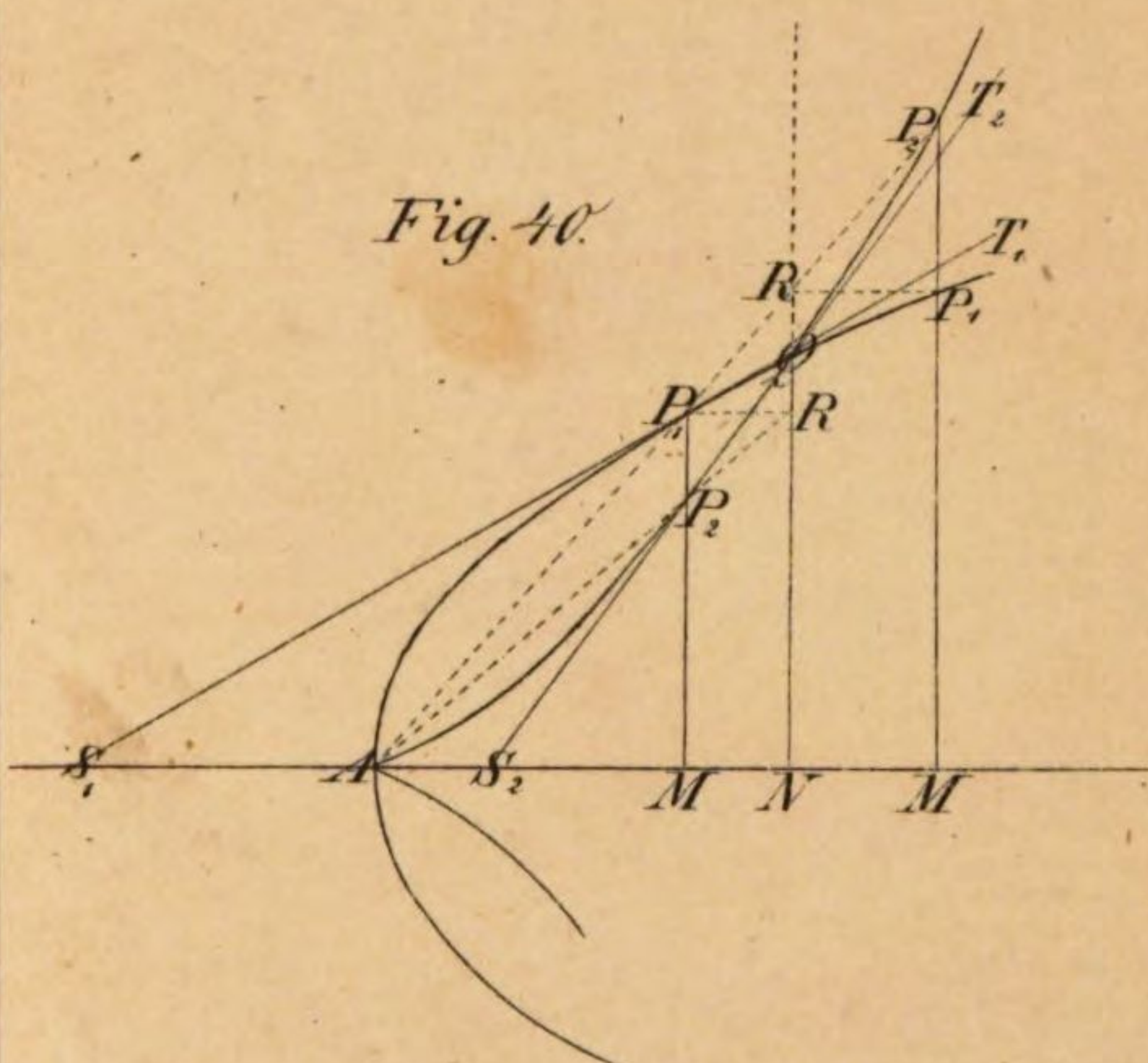


Fig. 35.

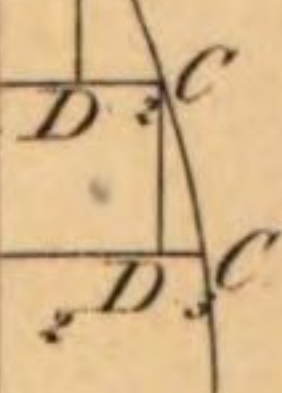
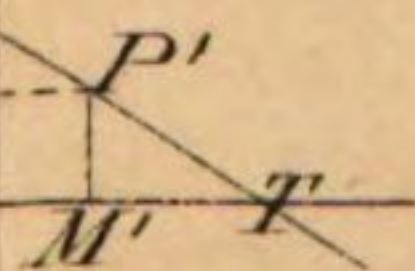
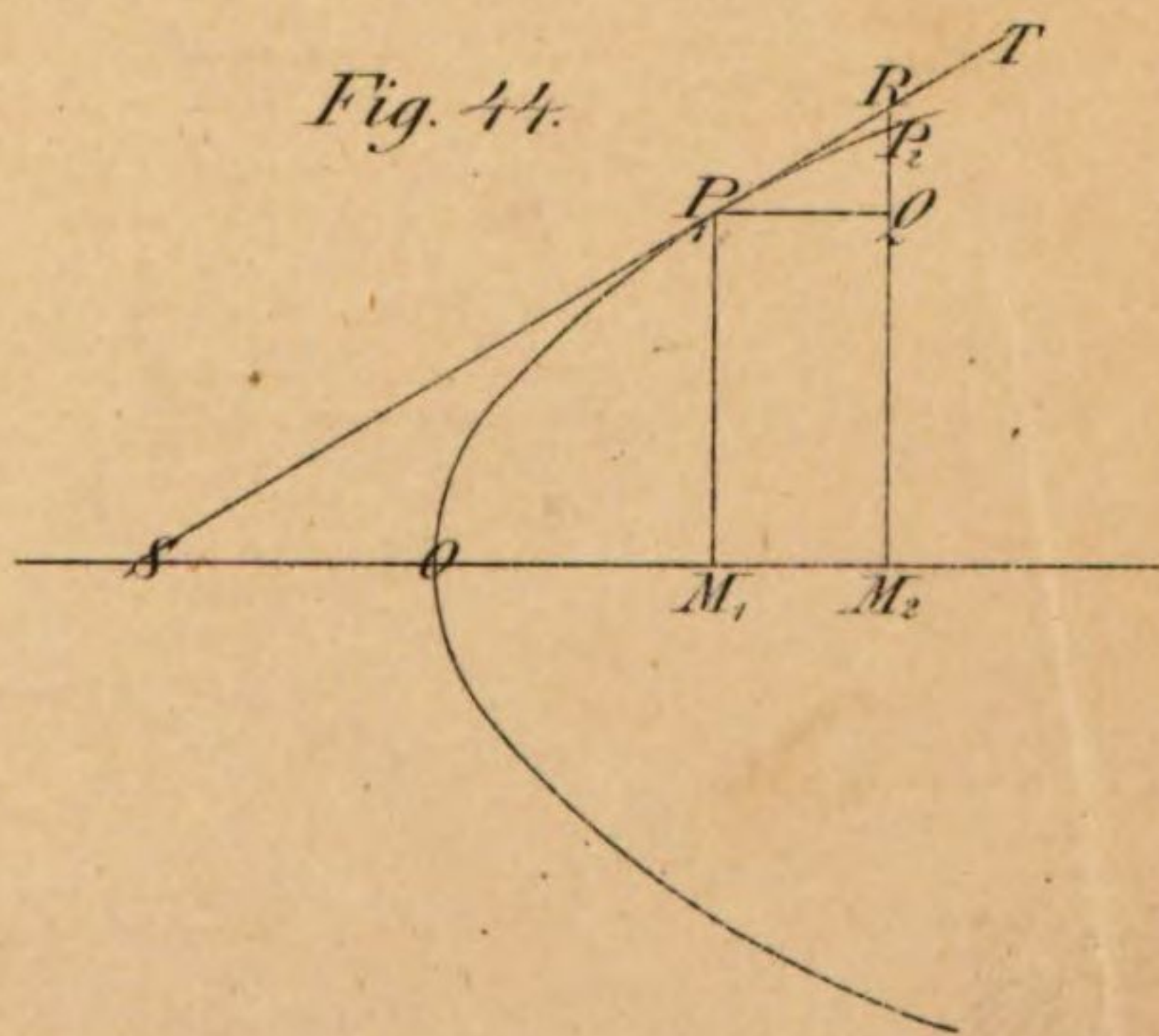


Fig. 44.



Weissenborn, Hermann

Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis
auf Lagrange, als ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der
Mathematik ; mit 3 Figuren-Tafeln

Halle 1856

Math.p. 635 pd

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083082-6